Výroková logika II

Negace

Již víme, že negace je změna pravdivostní hodnoty výroku (0 → 1; 1 → 0).

Na konkrétních příkladech si ukážeme, jak se dají výroky negovat.

Obecně se výrok dá negovat tak, že před něj napíšeme ***Není pravda, že***…

Výroky však jdou negovat i jinak (kratším, výstižnějším zápisem).

Výrok	Negace výroku
Mimo planetu Zemi existuje život.	***Není pravda, že*** mimo planetu Zemi existuje život. *nebo* Mimo planetu Zemi neexistuje život.
Venku prší.	***Není pravda, že*** venku prší. *nebo* Venku neprší.
Číslo 11 je prvočíslo.	***Není pravda, že*** číslo 11 je prvočíslo. *nebo* Číslo 11 není prvočíslo.
Součet velikostí úhlů v trojúhelníku je 180 °.	***Není pravda, že*** součet velikostí úhlů v trojúhelníku je 180 °. *nebo* Součet velikostí úhlů v trojúhelníku není 180 °.

Podívejme se teď na složitější příklady negací…

V následujících výrocích se budeme bavit o čokoládách. Aby byly výroky korektní, budeme předpokládat, že čokolády budou vždy celé (nerozbalené). Aneb po matematicku: „*Nechť je čokoláda celá…*“ Písmeno P pak značí libovolný celočíselný počet.

Výrok: V batohu mám ***právě P*** čokolád.
Negace výroku: V batohu mám ***nejvýše P - 1*** čokolád ***nebo alespoň P + 1*** čokolád.

Slovo *právě* nám říká, že těch čokolád je přesně P (třeba přesně 3, přesně 10, …). Pokud tedy budu mít v batohu 3 čokolády, opak tohoto stavu je, že budu mít jiný počet než 3. Podle uvedeného vzoru tedy nejvýše dvě, (0 čokolád, 1 čokoládu, 2 čokolády) nebo alespoň 4 (4 čokolády, 5 čokolád, 6 čokolád, …). Tím jsme obsáhli všechny možnosti kromě 3. Negací je tak výrok: „V batohu mám nejvýše 2 čokolády nebo alespoň 4 čokolády.“

Výrok: V batohu mám ***alespoň P*** čokolád.
Negace výroku: V batohu mám ***nejvýše P - 1*** čokolád.

Pokud si za písmeno P dosadím opět 3, výrok zní „V batohu mám alespoň 3 čokolády.“ To znamená, že v batohu můžu mít 3 a více čokolád (3, 4, 5, …). Negací toho je situace, kdy budu mít v batohu méně než 3 čokolády, tedy přicházejí v úvahu tyto počty: 0, 1, 2. Což se podle uvedeného vzoru dá napsat jako „V batohu mám nejvýše 2 čokolády.“

Výrok: V batohu mám ***nejvýše P*** čokolád.
Negace výroku: V batohu mám ***alespoň P + 1*** čokolád.

Nyní dosadíme za písmeno P třeba osmičku. Pak píšeme: „V batohu mám nejvýše 8 čokolád.“ Připadají v úvahu tedy tyto možnosti: 1 čokoláda, 2 čokolády, 3 čokolády, 4 čokolády, 5 čokolád, 6 čokolád, 7 čokolád, 8 čokolád. Opakem (negací) je situace, kdy těch čokolád je 9 a více.
Negací je tedy výrok „V batohu mám alespoň 9 čokolád.“

Výrok: ***Každá*** čokoláda v mém batohu ***je*** mléčná.
Negace výroku: ***Alespoň jedna*** čokoláda v mém batohu ***není*** mléčná.

Výrok: ***Žádná*** čokoláda v mém batohu ***není*** mléčná.
Negace výroku: ***Alespoň jedna*** čokoláda v mém batohu ***je*** mléčná.

Uvedeme si ještě dva příklady výroků a jejich negací.

Nejprve máme negovat výrok ***Výsledek příkladu je záporný.***
Negaci můžeme samozřejmě napsat „*Není pravda, že výsledek příkladu není záporný.*“ Jednodušší zápis negace je „*Výsledek příkladu není záporný.*“

Stále však nevíme, jaký ten výsledek vlastně je. Negaci tedy napíšeme ještě jinak.
Pokud tedy je výsledek příkladu záporný, znamená to, že je *menší než nula*. Negací k tomuto tvrzení je, že výsledek je *kladný* ***nebo rovný nule***.

Negací výroku „**Výsledek příkladu je záporný**.“ je tak i výrok „**Výsledek příkladu je kladný nebo rovný nule.**“

Pokud si (slovo) výsledek označíme třeba písmenkem „t“, můžeme výrok „Výsledek příkladu je záporný.“ napsat jako $t < 0$. Negací je potom otočení zobáčku a doplnění rovnítka: $t \geq 0$.

Pozor! Nesmíme při negaci výroku zapomínat na nulu. Pokud bychom jako negaci napsali pouze „*Výsledek příkladu je kladný.*“, bylo by to špatně.

Shrneme si to do tabulky:

Výrok	Negace výroku
Výsledek příkladu je záporný.	***Není pravda, že*** výsledek příkladu je záporný. *nebo* Výsledek příkladu není záporný (je nezáporný). *nebo* **Výsledek příkladu je kladný nebo rovný nule.**

Nyní zkusíme negovat výrok „Moje vlasy nejsou delší než 30 centimetrů.“

Moje vlasy tedy jsou kratší nebo rovny 30 centimetrům délky. Negací pak je stav, kdy mám vlasy delší než 30 centimetrů.

Negaci tedy můžeme napsat jako „Moje vlasy jsou delší než 30 centimetrů.“

Pokud si délku vlasů označíme písmenkem „l“, můžeme psát:

Výrok: $l \leq 30cm$
Negace výroku: $l > 30cm$

Opět si to shrneme do tabulky

Výrok	Negace výroku
Moje vlasy nejsou delší než 30 centimetrů.	***Není pravda, že*** moje vlasy nejsou delší než 30 centimetrů. *nebo* Moje vlasy jsou delší než 30 centimetrů. *nebo ještě (i když trochu krkolomně znějící)* Moje vlasy nejsou kratší než 30 centimetrů nebo nejsou rovny 30 centimetrům délky.

Negace složených výroků

Negace konjunkce (Co je to konjunkce, je vysvětleno v předchozí kapitole *Výroková logika 1*.)

Mějme dva výroky:

Výrok A: Číslo 18 je dělitelné devíti.
Výrok B: Číslo 18 je sudé.

Negace výroku A: Číslo 18 není dělitelné devíti.
Negace výroku B: Číslo 18 není sudé.

Konjunkce výroků (A ∧ B): Číslo 18 je dělitelné devíti a (současně) je sudé.

Zkusme tento výrok nyní znegovat. Hledáme tedy výrok **¬ (A ∧ B)**.
Pomůže nám k tomu tabulka:

A	B	¬ A	¬ B	A ∧ B	¬ (A ∧ B)	?
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Pozn.: Řádky tabulky budeme počítat od řádku, kde se vyskytují číslice. Prvním řádkem je tedy řádek, kde oba výroky mají pravdivostní hodnotu jedna (vlastně druhý řádek v tabulce).
Do celkového počtu řádků pak budeme počítat pouze řádky s číslicemi. Tabulka tak má 4 řádky.

V prvních dvou sloupcích máme napsány vzájemné různé kombinace pravdivostních hodnot výroků A a B. Proto má tabulka čtyři řádky, abychom dostali všechny možné kombinace pravdivostních hodnot výroků A a B.

Ve třetím sloupci je pak negace výroku A. Oproti prvnímu sloupci má opačné pravdivostní hodnoty.

Ve čtvrtém sloupci je negace výroku B. Oproti druhému sloupci má opačné pravdivostní hodnoty.

V pátém sloupci je konjunkce výroků A a B. Ta nabývá pravdivostní hodnoty jedna (je pravdivá), pokud mají oba výroky pravdivostní hodnotu 1 (jsou pravdivé) – což splňuje pouze první řádek (prvních dvou sloupců).

V šestém sloupci jsou pak pravdivostní hodnoty složeného výroku (negace konjunkce výroků A a B), který chceme slovně vyjádřit.

Jak je vidět, **sedmý sloupec** je, co se pravdivostních hodnot týká, shodný se sloupcem šestým.

Abychom totiž mohli složený výrok **¬ (A ∧ B)** vyjádřit slovně, potřebujeme najít takové spojení libovolných výroků z předchozích sloupců (prvních čtyř), které dává stejné pravdivostní hodnoty, jako sloupec s výrokem, který máme vyjádřit (šestý sloupec). Ten pak vyjádříme slovně a dostaneme tím i slovní vyjádření námi hledaného složeného výroku.

Možná se teď ptáte: „Jak na takové spojení ale mám přijít?“
Inu, není to tak složité, jak se na první pohled zdá. Složený výrok **¬ (A ∧ B)** nabývá nuly a tří jedniček. Hledáme tedy spojení výroků, které nabývá také nuly a tří jedniček. V úvahu tak přichází disjunkce nebo implikace (viz předchozí kapitola).

Zkusíme implikaci. Teď už jen najít takové dva výroky z prvních čtyř sloupců, jejichž implikace dává stejné pravdivostní hodnoty, jako výraz **¬ (A ∧ B)**. V prvním řádku má být 0 (nepravdivá). Implikace je nepravdivá, když první výrok je pravdivý a druhý nepravdivý. V úvahu tedy přicházejí čtyři kombinace, kde první výrok je nula a druhý jedna. Vycházíme z předchozí tabulky.

A ⇒ ¬ A	**A ⇒ ¬ B**	**B ⇒ ¬ A**	**B ⇒ ¬ B**
0	0	0	0
0	1	1	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Jelikož v prvním řádku má být nula a disjunkce nabývá pravdivostní hodnoty nula (je nepravdivá) v případě, že oba výroky jsou nepravdivé, přichází v úvahu jedna kombinace. Opět vycházíme z předchozí (velké) tabulky.

¬ A ∨ ¬ B
0
1
1
1

Celkem tři sloupce, se nám shodují se sloupcem ve velké tabulce. Můžeme tedy napsat rovnost výrokových formulí:

¬ (A ∧ B) je rovna **A ⇒ ¬ B** je rovna **B ⇒ ¬ A** je rovna **¬ A ∨ ¬ B**

Nyní si to shrneme:

Výrok A: Číslo 18 je dělitelné devíti.
Výrok B: Číslo 18 je sudé.

Negace výroku A: Číslo 18 není dělitelné devíti.
Negace výroku B: Číslo 18 není sudé.

Konjunkce výroků (A ∧ B): Číslo 18 je dělitelné devíti a (současně) je sudé.

¬ (A ∧ B) = ?

Z tabulek nám vyšlo, že negaci konjunkce dvou výroků můžeme napsat také některým z následujících zápisů.

A ⇒ ¬ B: Jestliže číslo 18 je dělitelné devíti, potom není sudé.

B ⇒ ¬ A: Jestliže číslo 18 je sudé, potom není dělitelné devíti.

¬ A ∨ ¬ B: Číslo 18 není dělitelné devíti nebo není sudé.

I když se to na první pohled nemusí zdát, všechny věty znamenají to samé. Říkají nám, že číslo 18 nemůže být současně dělitelné devíti a sudé (může tedy být nejvýše jedno nebo ani jedno z toho). Tím tak negují původní výrok.

Negace disjunkce (Co je to disjunkce, je vysvětleno v předchozí kapitole *Výroková logika 1*.)

Mějme opět následující dva výroky:

Výrok A: Číslo 18 je dělitelné devíti.
Výrok B: Číslo 18 je sudé.

Negace výroku A: Číslo 18 není dělitelné devíti.
Negace výroku B: Číslo 18 není sudé.

Disjunkce výroků (A ∨ B): Číslo 18 je dělitelné devíti nebo je sudé.

Zkusme tento výrok nyní znegovat. Hledáme tedy výrok **¬ (A ∨ B)**.
Pomůže nám k tomu tabulka:

A	B	¬ A	¬ B	A ∨ B	¬ (A ∨ B)	?
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Hledáme zase takové spojení dvou libovolných výroků z předchozích sloupců, které dá stejné pravdivostní hodnoty jako námi hledaný šestý sloupec. Pokud takové spojení najdeme a vyjádříme ho slovně, dostaneme tím vlastně i slovní vyjádření šestého sloupce.

V tomto případě to máme jednodušší, než v případě předchozím. Hledáme totiž takový složený výrok, který nabývá tří nul a jedničky. V úvahu tedy přichází pouze konjunkce.

V prvním řádku má být nula, hledáme tedy takové kombinace výroků na prvních řádcích z prvních čtyř sloupců, jejichž konjunkce dá nulu. **Výhodnější je však začít posledním řádkem, jelikož ten má dát jedničku. A jedničku získáme pouze tehdy, když jsou oba výroky pravdivé.** V úvahu tedy přichází pouze tato kombinace:

¬ A ∧ ¬ B
0
1
1
1

Dostali jsme tuto rovnost:

¬ (A ∨ B) je rovna **¬ A ∧ ¬ B**

Shrneme si to:

Výrok A: Číslo 18 je dělitelné devíti.
Výrok B: Číslo 18 je sudé.

Negace výroku A: Číslo 18 není dělitelné devíti.
Negace výroku B: Číslo 18 není sudé.

Disjunkce výroků (A ∨ B): Číslo 18 je dělitelné devíti nebo je sudé.

¬ (A ∨ B) = ?

Z tabulky nám vyšlo, že negaci disjunkce dvou výroků můžeme napsat také následujícím zápisem.

¬ A ∧ ¬ B: Číslo 18 není dělitelné devíti a (současně) není sudé.

Následující negace už nebudou tak podrobně popsány, princip je totiž stejný, jako v předchozích případech.

Negace implikace (Co je to implikace, je vysvětleno v předchozí kapitole *Výroková logika 1*.)

Výrok A: Číslo 18 je dělitelné devíti.
Výrok B: Číslo 18 je sudé.

Negace výroku A: Číslo 18 není dělitelné devíti.
Negace výroku B: Číslo 18 není sudé.

Implikace výroků (A ⇒ B): Číslo 18 je dělitelné devíti nebo je sudé.

¬ (A ⇒ B) = ?

A	B	¬ A	¬ B	A ⇒ B	¬ (A ⇒ B)	?
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

A ∧ ¬ B
0
1
0
0

¬ (A ⇒ B) je rovna **A ∧ ¬ B**

Shrnutí:

Výrok A: Číslo 18 je dělitelné devíti.
Výrok B: Číslo 18 je sudé.

Negace výroku A: Číslo 18 není dělitelné devíti.
Negace výroku B: Číslo 18 není sudé.

Implikace výroků (A ⇒ B): Číslo 18 je dělitelné devíti nebo je sudé.

¬ (A ⇒ B) = ?

Z tabulky nám vyšlo, že negace implikace dvou výroků je rovna **A ∧ ¬ B**.

A ∧ ¬ B: Číslo 18 je dělitelné devíti a (současně) není sudé.

Negace ekvivalence (Co je to ekvivalence, je vysvětleno v předchozí kapitole *Výroková logika 1*.)

Výrok A: Číslo 18 je dělitelné devíti.
Výrok B: Číslo 18 je sudé.

Negace výroku A: Číslo 18 není dělitelné devíti.
Negace výroku B: Číslo 18 není sudé.

Implikace výroků (A ⇔ B): Číslo 18 je dělitelné devíti právě tehdy, když je sudé.

A	B	¬ A	¬ B	A ⇔ B	¬ (A ⇔ B)	?
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

A ⇔ ¬ B	¬ A ⇔ B
0	0
1	1
1	1
0	0

Shrnutí:

Výrok A: Číslo 18 je dělitelné devíti.
Výrok B: Číslo 18 je sudé.

Negace výroku A: Číslo 18 není dělitelné devíti.
Negace výroku B: Číslo 18 není sudé.

Ekvivalence výroků (A ⇔ B): Číslo 18 je dělitelné devíti právě tehdy, když je sudé.

¬ (A ⇔ B) = ?

Z tabulky nám vyšlo, že negace ekvivalence dvou výroků je rovna **A ⇔ ¬ B** nebo **¬ A ⇔ B**.

A ⇔ ¬ B: Číslo 18 je dělitelné devíti právě tehdy, když není sudé.
¬ A ⇔ B: Číslo 18 není dělitelné devíti právě tehdy, když je sudé.

Řešení výrokových formulí

Vyřešme tuto výrokovou formuli:

(A ∨ B) ⇔ (¬ A ⇒ B)

K vyřešení si sestavíme tabulku, do které zapíšeme všechny dílčí výroky a nakonec výrok, který hledáme:

A	B	¬ A	A ∨ B	¬ A ⇒ B	(A ∨ B) ⇔ (¬ A ⇒ B)
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

Implikace výroků je pravdivá, když oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu.
Řešením je poslední sloupeček tabulky. Zjistili jsme, jakých pravdivostních hodnot
(v závislosti na pravdivostních hodnotách výroků A a B) může daná výroková formule nabývat.

Vyšlo nám, že *výroková formule je pravdivá vždy, ať už výrok A a výrok B nabývají jakékoli pravdivostní hodnoty*. Takovému výsledku se říká ***tautologie***.

Zkusme si to, co jsme zapsali pomocí tabulky napsat i pomocí vět.

A: Venku prší.
B: Venku jsou blesky.

¬ A: Venku neprší.

A ∨ **B:** Venku prší nebo jsou blesky.

¬ A ⇒ **B:** Jestliže venku neprší, jsou venku blesky.

(A ∨ B) ⇔ (¬ A ⇒ B): Venku prší nebo jsou blesky právě tehdy, když venku jsou blesky.

I když je věta trochu krkolomná, je pravdivá vždy, ať už prší nebo neprší, jsou blesky nebo nejsou blesky.

Protože pokud jsou venku blesky, tak venku sice pršet nemusí, ale musí tam být blesky. Tak, jak to říká výsledná výroková formule.

Zkusíme vyřešit ještě tuto výrokovou formuli:

¬ (A ∨ ¬ A)

A	¬ A	A ∨ ¬ A	¬ (A ∨ ¬ A)
1	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	1	0

Vyšlo nám, že *výroková formule je vždy nepravdivá*. Takovému výsledku se říká ***kontraindikace***.

Jednotlivé výroky napíšeme zase pomocí vět.

A: Venku prší.

¬ A: Venku neprší.

A ∨ **¬ A:** Venku prší nebo venku neprší.
Toto spojení výroků bude samozřejmě pravdivá vždy (viz předposlední sloupeček tabulky).

¬ (A ∨ **¬ A)** … Jak už (možná *;-)*) víme, platí **¬ (A** ∨ **B)** je rovna **¬ A** ∧ **¬ B**. Pro naši výrokovou formuli tedy můžeme psát:
¬ (A ∨ **¬ A) = ¬ A** ∧ **¬¬ A = ¬ A** ∧ **A** (negace negace A je totiž to samé jako A)

¬ (A ∨ ¬ A) = ¬ A ∧ A: Venku neprší a (současně) prší.

Jak vidíme, věta nemůže být nikdy pravdivá. Jedná se tak o *kontraindikaci*.

Samozřejmě, že řešením výrokových formulí nejsou vždy *tautologie* a *kontraindikace*.