# Povrchy, objemy

*Povrch* nám vlastně říká, kolik tapety potřebujeme k polepení daného tělesa. Základní jednotkou jsou metry čtverečné ($\boldsymbol{m^2}$).

*Objem* nám pak říká, kolik vody se do daného tělesa vejde. Základní jednotkou jsou metry krychlové ($\boldsymbol{m^3}$).

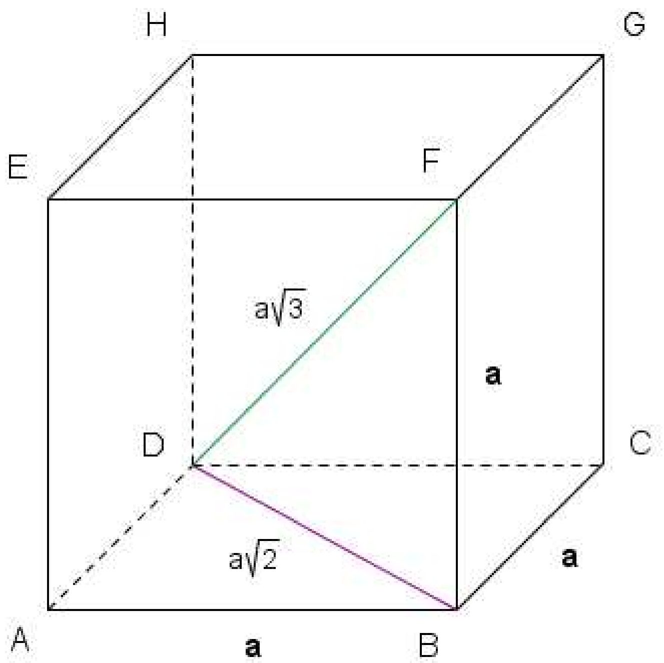
Velmi často se objem udává v litrech. Napíšeme si tedy převod mezi litry a metry krychlovými.

$$\mathbf{1}\ \boldsymbol{m}^{\mathbf{3}} = \mathbf{1000}\ \boldsymbol{l}$$

$$\mathbf{1}\ \boldsymbol{l} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1000}}\ \boldsymbol{m}^{\mathbf{3}} = \mathbf{0,001}\ \boldsymbol{m}^{\mathbf{3}}$$

*Povrch* budeme značit písmenem ***S*** a *objem* písmenem ***V***.

## Krychle




Povrch

$$\boldsymbol{S = 6a^2}$$

Plášť krychle se totiž skládá z 6 čtverců.

Objem

$$\boldsymbol{V = a \cdot a \cdot a = a^3}$$

Stěnová úhlopříčka

$$u_s{}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$u_s = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{2} \cdot a = a\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{u_s = a\sqrt{2}}$$

Tělesová úhlopříčka

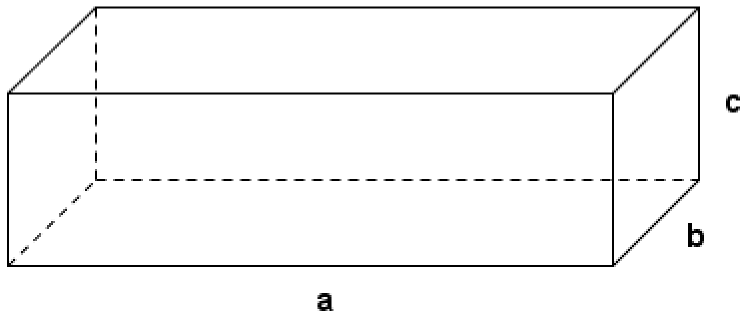
$$u_t{}^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$$

$$u_t{}^2 = a^2(\sqrt{2})^2 + a^2 = a^2 \cdot 2 + a^2 = 3a^2$$

$$u_t = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{3} \cdot a = a\sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{u_t = a\sqrt{3}}$$

## Kvádr




Povrch

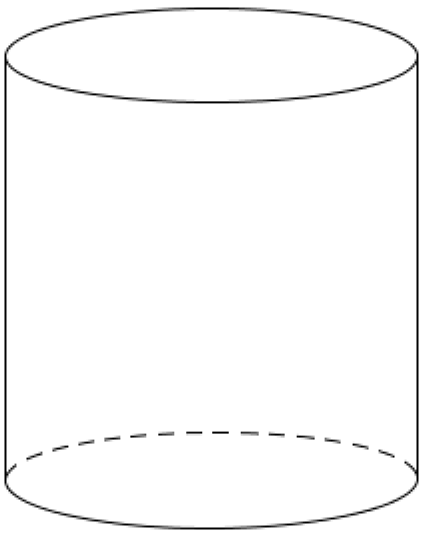
$S = 2ab + 2bc + 2ac$

$\boldsymbol{S = 2\,(ab + bc + ac)}$

Objem

$\boldsymbol{V = abc}$

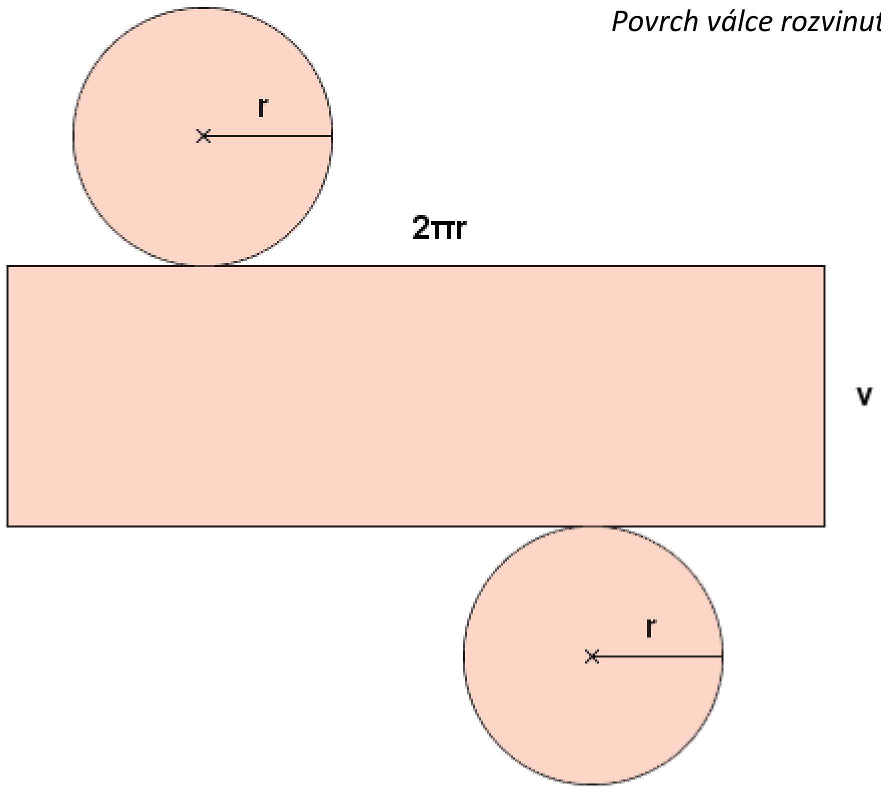
## Válec (rotační – podstavou je kruh)



Vznikne rotací (otáčením) obdélníku kolem jedné jeho strany – „jedna strana obdélníku je nehybná a zbytek se kolem ní otáčí“.

Povrch

*Povrch válce rozvinutý do roviny – síť válce*




$\boldsymbol{S = 2P + Q}$

$P$ … obsah podstavy

$Q$ … obsah pláště

Povrch rotačního válce je vlastně dán součtem obsahů *dvou kruhů* (ty tvoří dolní a horní podstavu) a obsahu *obdélníku* (ten tvoří plášť).

$P = \pi r^2$

Plášť je tedy tvořen obdélníkem o stranách $2\pi r$ (obvod kruhu) a $v$ výšky válce.

$Q = 2\pi r \cdot v$

Vztah pro výpočet obsahu pak je:

$S = 2P + Q = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot v = 2\pi r(r + v)$

$\boldsymbol{S = 2\pi r(r + v)}$

Poslední úpravou bylo vytknutí výrazu $2\pi r$.

Objem

$$\boldsymbol{V = P \cdot v}$$

$P$ … obsah podstavy

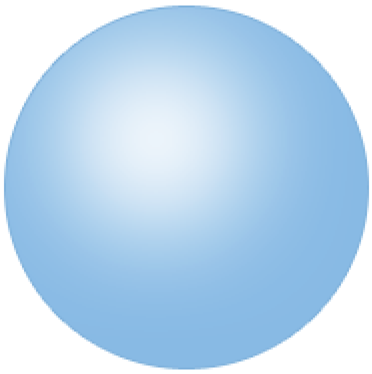
$v$ … výška válce

Jelikož podstavu válce tvoří kruh, můžeme vzorec pro objem napsat:

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 \cdot v}$$

$\boldsymbol{r}$ … poloměr kruhu

## Koule



Povrch

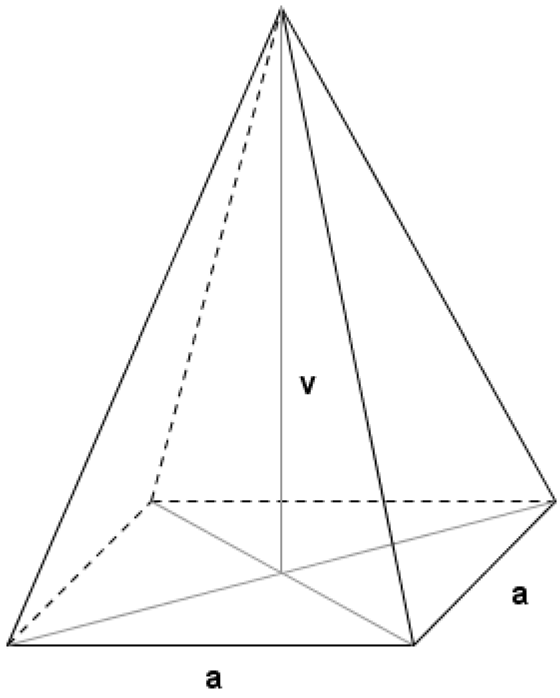
$$\boldsymbol{S = 4\pi r^2}$$

*Povrch (plášť)koule nejde rozvinout do roviny – neexistuje tak síť koule.*

Objem

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

## Jehlan (pravidelný čtyřboký)




Povrch

$\boldsymbol{S = P + Q}$

Obecný vzorec pro výpočet povrchu (nejen pravidelného čtyřbokého) jehlanu.

$P$ … obsah podstavy

$Q$ … povrch pláště (součet obsahů stěn)

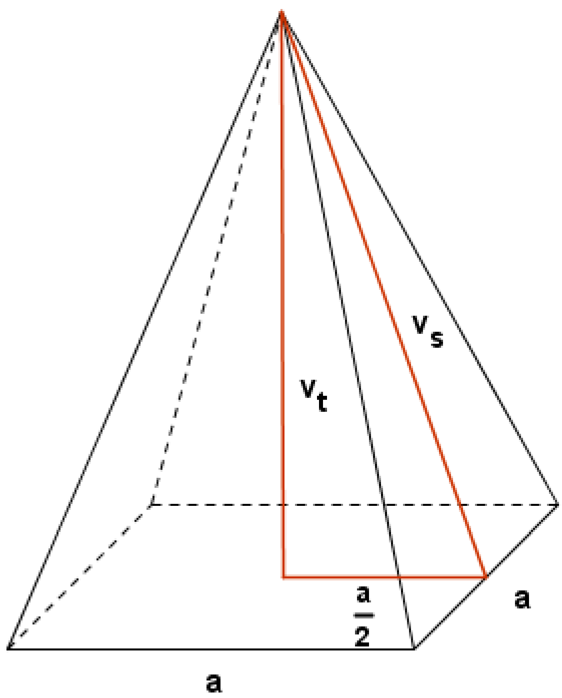
Objem

$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} P \cdot v}$

Obecný vzorec pro výpočet objemu (nejen pravidelného čtyřbokého) jehlanu.

$P$ … obsah podstavy

$v$ … výška jehlanu




U pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavou je čtverec můžeme povrch zapsat jako součet *obsahu podstavy* a *obsahu čtyř stěn*.

Obsah podstavy se vypočítá:

$P = a \cdot a = a^2$

Obsah pláště je obsah stěny (trojúhelníku) vynásobený čtyřmi (stěny jsou čtyři).

*Obsah stěny (trojúhelníku) se vypočítá jako součin strany* $\boldsymbol{a}$ *a k ní příslušné výšky* $\boldsymbol{v_s}$ (stěnová výška), *dělený dvěma.*

$$P_{\triangle} = \frac{a \cdot v_s}{2}$$

Povrch pláště pak je:

$$Q = 4P_{\triangle} = 4\frac{a \cdot v_s}{2} = 2 \cdot a \cdot v_s = 2av_s$$

Výpočet povrchu tedy je:

$S = a^2 + 2av_s$

Pokud neznáme velikost stěnové výšky $\boldsymbol{v_s}$, můžeme si její velikost dopočítat za předpokladu, že známe velikost tělesové výšky jehlanu $\boldsymbol{v_t}$ a velikost strany podstavy $\boldsymbol{a}$.

Výška $\boldsymbol{v_s}$ je totiž přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou $\boldsymbol{v_t}$ a $\boldsymbol{\frac{a}{2}}$ (vizte obrázek).

Můžeme tedy podle *Pythagorovy věty* psát:

$$v_s{}^2 = v_t{}^2 + (\frac{a}{2})^2 = v_t{}^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$v_s = \sqrt{v_t{}^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Dosadíme za $\boldsymbol{v_s}$ do uvedeného vztahu pro výpočet povrchu a výraz budeme dále upravovat.

$$S = a^2 + 2a\sqrt{v_t{}^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$S = a^2 + a\sqrt{4v_t{}^2 + 4\frac{a^2}{4}} = a^2 + a\sqrt{4v_t{}^2 + a^2}$$

Dvojku jsme dali pod odmocninu, „změnila“ se tak na čtyřku a tou jsme roznásobili každý člen součtu pod odmocninou. Ve druhém členu součtu se nám čtyřky zkrátily.

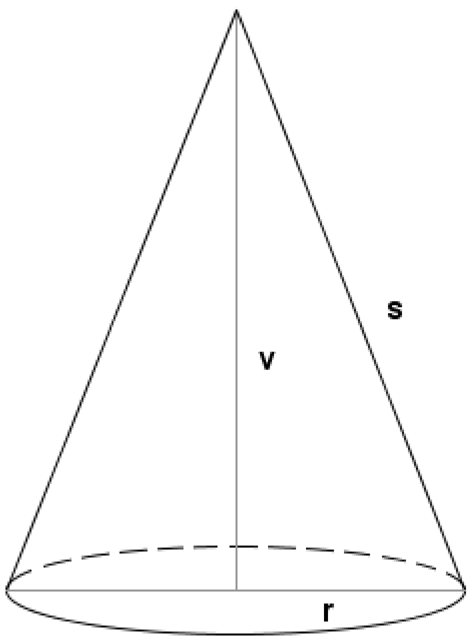
Nyní ještě vytkneme $\boldsymbol{a}$.

$$\boldsymbol{S = a \cdot (a + \sqrt{4v_t{}^2 + a^2})}$$

Vyjádřili jsme tak vztah pro výpočet povrchu pravidelného čtyřbokého jehlanu, za pomoci velikosti strany podstavy $\boldsymbol{a}$ a tělesové výšky jehlanu $\boldsymbol{v_t}$.

## Kužel (rotační – podstavou je kruh)

Vznikne rotací (otáčením) pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho odvěsny – „jedna odvěsna trojúhelníku je nehybná a zbytek se kolem ní otáčí“. Na obrázku se jedná o odvěsnu označenou písmenem ***v***, což je zároveň tělesová výška kužele.




Povrch

$\boldsymbol{S = P + Q}$

Obecný vzorec pro výpočet povrchu (nejen rotačního) kuželu.

$P$ … obsah podstavy

$Q$ … povrch pláště

Objem

$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} P \cdot v}$

Obecný vzorec pro výpočet objemu (nejen rotačního) kuželu.

$P$ … obsah podstavy

$v$ … výška jehlanu

Výpočet povrchu rotačního kužele

$$S = P + Q = \pi r^2 + \pi r s$$

Písmenko s, což je vlastně výška (délka) stěny pláště, můžeme vypočítat z Pythagorovy věty (za předpokladu, že známe poloměr kružnice, která tvoří podstavu a tělesovou výšku kužele).

$$s^2 = r^2 + v^2$$

$$s = \sqrt{r^2 + v^2}$$

Nyní dosadíme do předchozího vztahu za $\boldsymbol{s}$.

$$S = P + Q = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + v^2}$$

Výraz ještě upravíme tak, že vytkneme $\boldsymbol{\pi r}$.

$$\boldsymbol{S = \pi r \cdot (r + \sqrt{r^2 + v^2})}$$

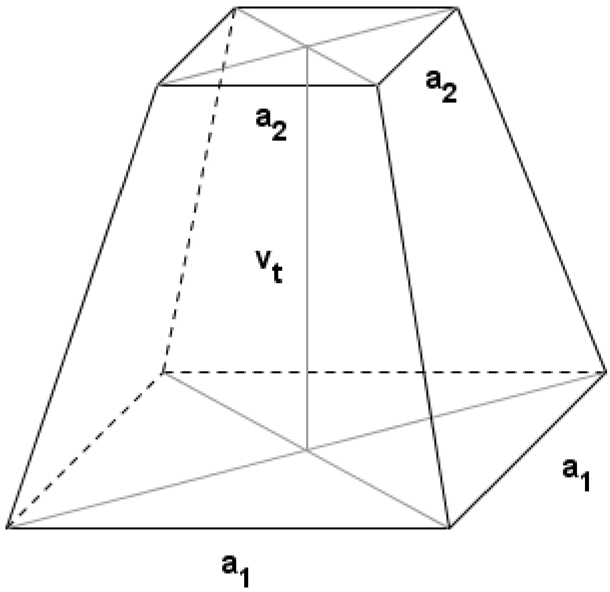
Tím jsme vyjádřili vztah pro výpočet povrchu rotačního kuželu.

Vzorec pro výpočet objemu rotačního kuželu pak je:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} P \cdot v = \frac{1}{3}\, \pi r^2 \cdot v}$$

## Komolý jehlan

Je to vlastně jehlan s uříznutou špičkou.




U komolého jehlanu si uvedeme pouze obecné vzorce pro výpočet povrchu a objemu. Konkrétní vzorce pro uvedené těleso na obrázku nechám na Vás. :-)

Povrch

$$\boldsymbol{S = P_1 + P_2 + Q}$$

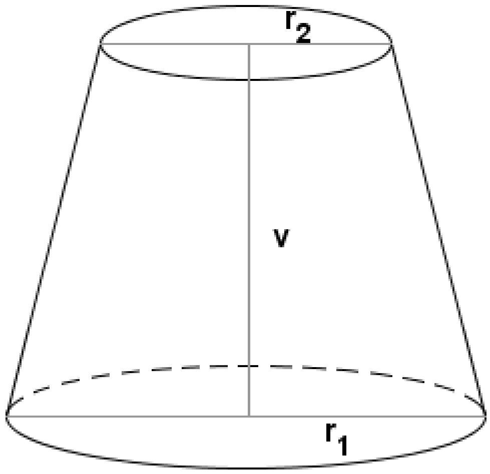
$P_1$ … obsah spodní podstavy
$P_2$ … obsah horní podstavy
$Q$ … povrch pláště

Objem

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} v\left(P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2\right)}$$

## Komolý kužel (rotační)

Je to vlastně kužel s uříznutou špičkou.




U komolého kuželu si uvedeme pouze obecné vzorce pro výpočet povrchu a objemu. Konkrétní vzorce pro uvedené těleso na obrázku nechám na Vás. :-)

Povrch

$$\boldsymbol{S = P_1 + P_2 + Q}$$

$P_1$ … obsah spodní podstavy
$P_2$ … obsah horní podstavy
$Q$ … povrch pláště

Objem

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} v\left(P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2\right)}$$