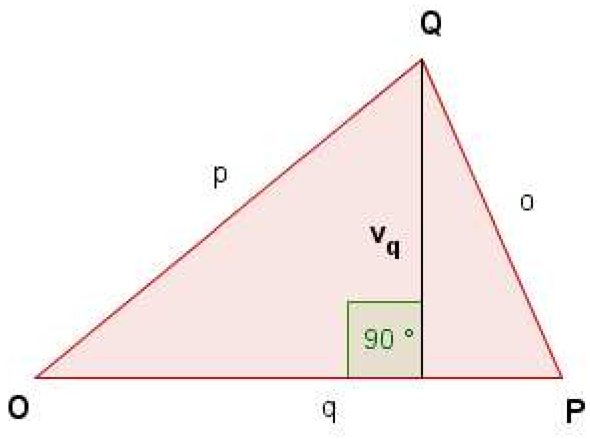
Obsahy

Obsah nám říká, jak velkou plochu daný útvar zaujímá. Třeba jak velký máme byt nebo pozemek – kolik metrů čtverečných (m^2), hektarů (ha), centimetrů čtverečných (cm^2), …

Základní jednotkou obsahu je ***metr čtverečný → m²***

Obsah budeme značit písmenem *P*. Často se také používá písmeno ***S***, ale já mám radši ***P***. :-)

Trojúhelník



$$\boldsymbol{P = \frac{q \cdot v_q}{2}}$$

Obsah se spočítá jako součin *strany* a k ní příslušné *výšky* dělený dvěma.
Pokud neznáme výšku, ale známe všechny tři strany, můžeme obsah trojúhelníku vypočítat dle *Heronova vzorce* (vizte dále).

Heronův vzorec:

$$\boldsymbol{P = \sqrt{s(s-o)(s-p)(s-q)}}$$

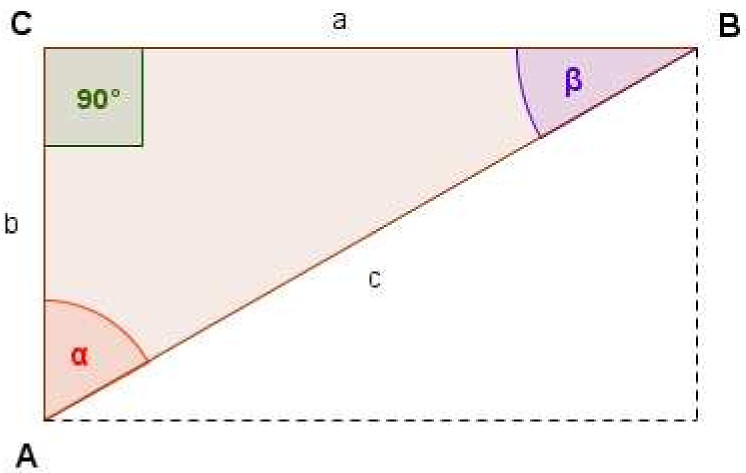
o, p, q … strany trojúhelníka (pokud máme trojúhelník *KLM*, budou strany označeny *k, l, m*, pokud máme trojúhelník *ABC*, budou strany označeny *a, b, c*, atd.)

s … polovina obvodu trojúhelníku

Pro trojúhelník na obrázku je tedy:

$$s = \frac{o+p+q}{2}$$

Pravoúhlý trojúhelník



U pravoúhlého trojúhelníku jsou výškami vlastně odvěsny (*a, b*). K jedné odvěsně je příslušnou výškou vždy druhá odvěsna. Násobíme-li tedy stranu, která je odvěsnou s k ní příslušnou výškou, násobíme tak vlastně dvě odvěsny.

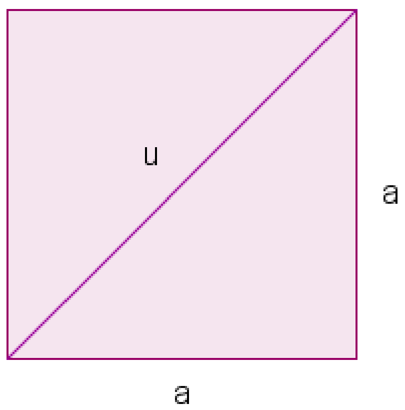
Z obrázku je také vidět, že pravoúhlý trojúhelník zaujímá vlastně polovinu obsahu obdélníku (pokud by odvěsny byly stejně dlouhé, zaujímal by takový trojúhelník polovinu obsahu čtverce) o stranách *a, b*.

Příslušný vztah pro výpočet obsahu pravoúhlého trojúhelníku tedy je:

$$\boldsymbol{P = \frac{a \cdot b}{2}}$$

a, b … odvěsny trojúhelníku

Čtverec



$$\boldsymbol{P = a \cdot a = a^2}$$

Úhlopříčka:

$$\boldsymbol{u = a\sqrt{2}}$$

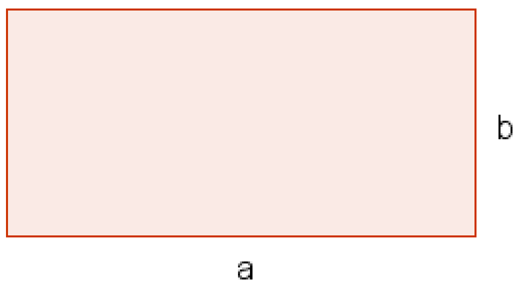
Její délku lze vypočítat z Pythagorovy věty, jelikož úhlopříčka je vlastně přepona pravoúhlého trojúhelníku a strany o velikosti a jsou odvěsny.

Platí:

$$u^2 = a^2 + a^2$$
$$u^2 = 2a^2$$
$$u = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{2} \cdot a = \boldsymbol{a\sqrt{2}}$$

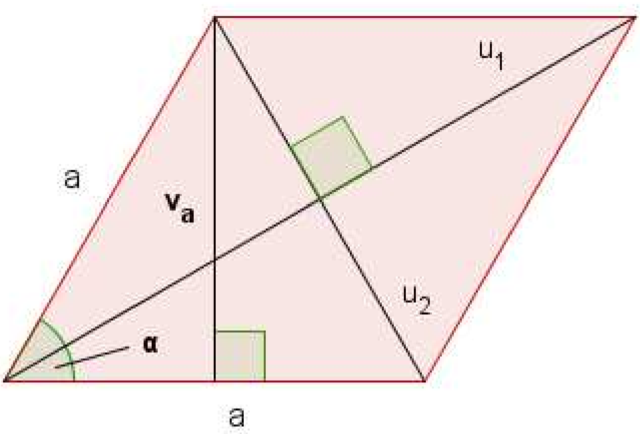
Poslední úpravou jsme do výrazu vnesli trochu matematické kultury. Tím, že jsme přesunuli $\boldsymbol{a}$ dopředu, je zřetelněji vidět, že $\boldsymbol{a}$ již nepatří pod odmocninu. Předejme tím, obzvláště při psaní tužkou, případným nedorozuměním.

Obdélník



$$\boldsymbol{P = a \cdot b}$$

Kosočtverec



Pokud se na obrázek dobře podíváme, zjistíme, že se obsah dá vypočítat jako $a \cdot v_a$.

Pokud bychom totiž z kosočtverce vyjmuli trojúhelník (zprava ohraničený výškou v_a) a přesunuli ho doprava, dostali bychom obdélník o stranách a a v_a.

Pozn.: Zelené čtverečky v obrázku značí pravé úhly.

Výšku v_a si můžeme vyjádřit pomocí funkce *sinus*.

$$sin\,\alpha = \frac{v_a}{a} \Rightarrow v_a = a \cdot sin\,\alpha$$

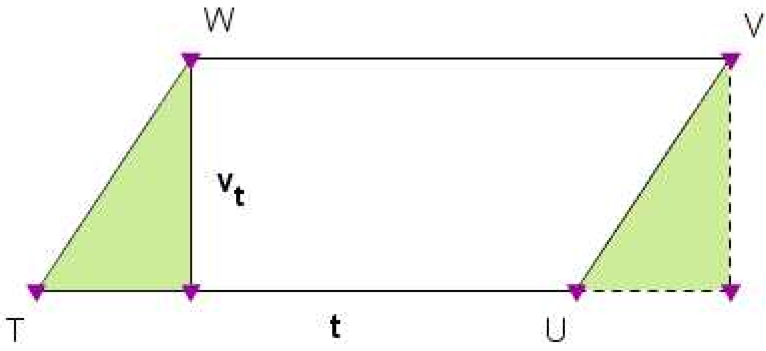
Obsah tedy můžeme spočítat…

$$\boldsymbol{P = a \cdot v_a = a \cdot a \cdot sin\,\alpha = a^2\, sin\,\alpha}$$

Obsah kosočtverce můžeme také vypočítat pomocí úhlopříček.

$$\boldsymbol{P = \frac{u_1 \cdot u_2}{2}}$$

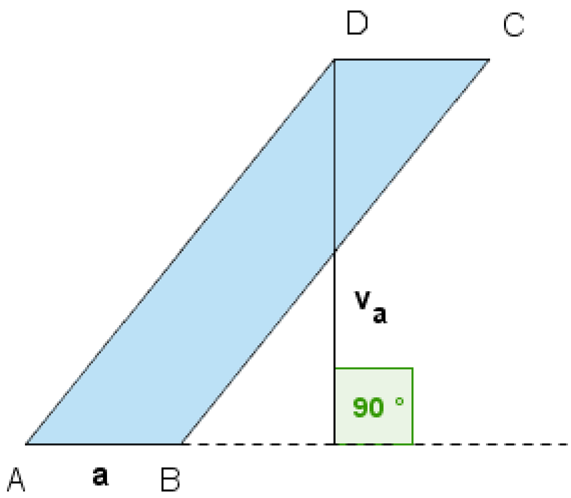
Kosodélník



Na obrázku je vyznačen kosodélník *TUVW*. Obsah se pak vypočítá

$$P = t \cdot v_t$$

Přenesením zeleného trojúhelníku zleva doprava bychom totiž dostali obdélník o stranách t a v_t.

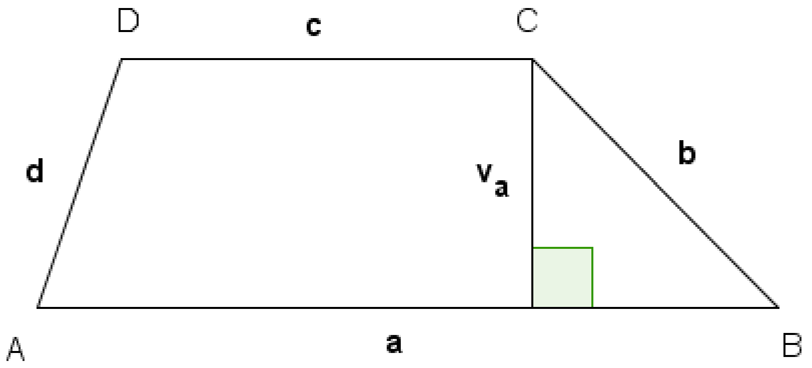


U kosodélníku *ABCD* je znázorněno, že výška k příslušné straně nemusí vždy celá procházet uvnitř kosodélníku. Přesto i v tomto případě se obsah vypočítá jako součin strany a k ní příslušné výšky.

$$P = a \cdot v_a$$

Pozn.: V tomto případě by byl názornější výpočet obsahu jako součinu strany „b“ a k ní příslušné výšky. Můžete si to vyzkoušet.

Lichoběžník

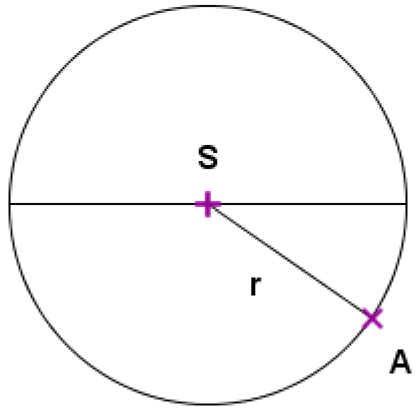


$$P = \frac{(a + c) \cdot v_a}{2}$$

Uvedený vztah nespadl z nebe, ale také se dá za pomoci obrázku odvodit. Ani to není příliš obtížné.

Pozn.: Zelený čtvereček v obrázku značí pravý úhel.

Kruh



$\boldsymbol{P = \pi \cdot r^2}$

$\boldsymbol{r}$ … poloměr kruhu

$\boldsymbol{\pi}$ … pí (Ludolfovo číslo)

Výpočet obsahu můžeme také zapsat pomocí průměru, který se obvykle značí $\boldsymbol{d}$.

Jelikož $\boldsymbol{r = \frac{d}{2}}$, zapíšeme vzorec pro výpočet obsahu jako:

$$P = \pi \cdot (\frac{d}{2})^2$$

Nyní výraz v závorce umocníme (umocníme každý člen zlomku – čitatele i jmenovatele).

$$\boldsymbol{P} = \pi \cdot \frac{d^2}{2^2} = \boldsymbol{\pi \frac{d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{4}\pi d^2}$$

Z posledních tři výrazy se akorát liší ve způsobu zápisu. Každý ať si vybere takový, jaký mu nejvíc vyhovuje.

U kruhu si také zmíníme vztah pro výpočet obvodu.
Obvod kruhu (kružnice) se vypočítá:

$$\boldsymbol{o = 2\pi r = \pi d}$$

$\boldsymbol{r}$ … poloměr kruhu (kružnice)
$\boldsymbol{d = 2r}$ … průměr kruhu (kružnice)

Pokud si ze vzorce pro výpočet obvodu vyjádříme písmeno π (Ludolfovo číslo), zjistíme, co nám vlastně říká.

$$\boldsymbol{o = \pi d \;\Rightarrow\; \pi = \frac{o}{d}}$$

Písmeno π nám tedy říká, *kolikrát je obvod kruhu (kružnice) větší než jeho (její) průměr*. Jak víme, je to přibližně *3,14krát*.

Přesnou hodnotu čísla π však nelze zapsat, jelikož má nekonečný desetinný rozvoj – za desetinnou čárkou je zkrátka nekonečně číslic.

Může se nám stát, že sice vzorce pro výpočet obvodu a obsahu kruhu známe, ale nejsme si jisti, který z nich je pro obvod a který pro obsah. Zde nám pomůže takzvaná jednotková zkouška. Zkrátka dosadíme do vzorce za jednotlivá písmenka příslušné jednotky.

Obvod:

$$\boldsymbol{o = 2\pi r}$$

Za dvojku a π jednotky nedosazujeme, zbývá tedy písmenko *r*. Poloměr je vlastně vzdálenost – základní jednotkou je metr.

Zápis bude tedy vypadat:

$$[\boldsymbol{o}] = \boldsymbol{m} \ \ (\text{Pokud dosazujeme jednotky, píšeme veličinu v hranatých závorkách.})$$

Vidíme, že jednotkou je metr (případně centimetr, milimetr, kilometr, …), což je jednotka délky, nikoli plochy, jak je tomu u obsahu (vizte dále).

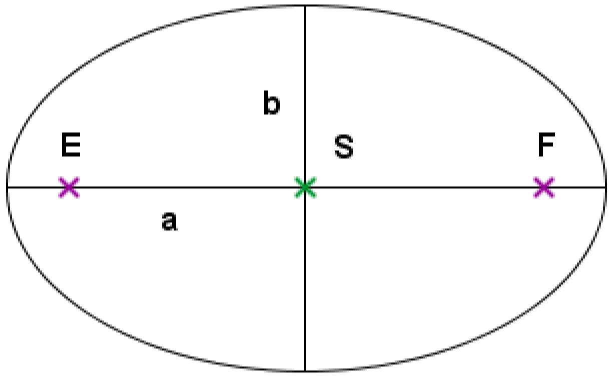
Obsah:

$$\boldsymbol{P = \pi r^2 = \pi \cdot r \cdot r}$$

$$[\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{m \cdot m = m^2}$$

Jednotkou je metr čtverečný, což je jednotka plochy. Jedná se tedy o vzorec pro obsah.

Elipsa (plocha ohraničená elipsou)



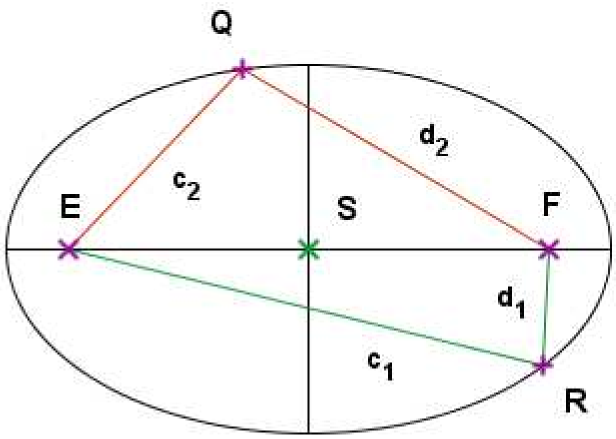
Jelikož elipsa je pouze „ta obvodová čára“, počítáme vlastně obsah plochy, kterou elipsa ohraničuje.

Elipsa je vlastně taková sešlápnutá kružnice. Obsah, plochy, kterou vymezuje kružnice (kruh) se spočítá $P = \pi \cdot r \cdot r = \pi r^2$.

Pokud se podíváme na obrázek, není těžké uhodnout, že obsah plochy ohraničené elipsou se pak spočítá jako:

$$\boldsymbol{P = \pi \cdot a \cdot b = \pi ab}$$

$\boldsymbol{a}$ … hlavní poloosa
$\boldsymbol{b}$ … vedlejší poloosa
$\boldsymbol{\pi}$ … pí (Ludolfovo číslo)



E a **F** jsou ohniska elipsy.

Součet vzdáleností bodu ***Q*** od ohnisek (na obrázku) je $c_2 + d_2$ a ten je stejný jako součet vzdáleností bodu ***R*** od ohnisek, $c_1 + d_1$.

$$\boldsymbol{c_1 + d_1 = c_2 + d_2}$$

Toto platí pro všechny body elipsy. Můžeme tedy říct:

Pro všechny body elipsy platí, že součet vzdáleností od ohnisek je stejný (konstantní).