Mocniny

Mocniny jsou zkráceným zápisem opakujícího se násobení.

Např.:

$8 \cdot 8 \cdot 8 = \mathbf{8^3} = 512$
$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = \mathbf{7^4} = 2401$
$(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^{\mathbf{3}}$
$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = \boldsymbol{x}^{\mathbf{17}}$

Zvlášť u posledního příkladu vidíme výhodnost mocninného zápisu.
Číslu nahoře se říká exponent (nemusí tam nutně být přímo číslo, ale klidně i písmeno, nebo nějaký složitější zápis).

9^{3x+16}

Pravidla počítání s mocninami

$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7 = 2187$

Snadno to dokážeme:

$3^2 = 3 \cdot 3$
$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
$3^2 \cdot 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$

Obecně tedy můžeme napsat:

$\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$

Další příklady:

$u^6 \cdot u^{3-t} = u^{6+3-t} = u^{9-t}$

$s^{2l+7} \cdot s^{12-3l} = s^{2l+7+12-3l} = s^{-l+19} = s^{19-l}$

$(e^{p-2} \cdot f^3)(ef^{-1}) = e^{p-2+1} f^{3-1} = e^{p-1} f^2$

V posledním kroku u druhé úlohy jsme přehodili pořadí exponentů, aby to vypadalo hezčeji (člen s minusem nebyl vepředu).

$(3^5)^2 = 3^{5\cdot 2} = 3^{10} = 59049$

Opět to snadno dokážeme:

$3^5 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$
$(3^5)^2 = (3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)^2 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\ \cdot\ 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^{10}$

Obecně můžeme napsat:

$$\boldsymbol{(a^p)^q = a^{p\cdot q}}$$

Další příklady:

$(3^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}} = 3^1 = 3$

$(x^2)^{11} = x^{22}$

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$$

Protože:

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3} = 3\cdot 3\cdot 3 = 3^3$$

Ve zlomku jsme krátili (poškrtali stejný počet stejných čísel v čitateli a jmenovateli).

Obecně můžeme napsat:

$$\boldsymbol{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$$

Jedná se o speciální případ násobení. Dělení je vlastně násobení převráceným číslem. Jistě můžeme napsat:

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^5\cdot\frac{1}{3^2}$$

A zlomku se zbavíme tak, že 3^2 ze jmenovatele přesuneme do čitatele a změníme znaménko exponentu.

$$3^5\cdot\frac{1}{3^2} = 3^5\cdot 3^{-2} = 3^{5+(-2)} = 3^{5-2} = 3^3$$

Čísla můžeme přehazovat z čitatele do jmenovatele a naopak, pokud jim vždy změníme znaménko jejich exponentu.

Např.:

$$\frac{5^{-2} \cdot 3}{2^{-7}} = \frac{3 \cdot 2^7}{5^2}$$

$$(2+y)^{-4} = \frac{1}{(2+y)^4}$$

Úpravy většinou provádíme tak, abychom ve výrazu měli kladné exponenty.

$$(3 \cdot 2)^3 = 3^3 \cdot 2^3 = 27 \cdot 8 = 216$$

Zkusíme, zda to „sedí“:

$$(3 \cdot 2)^3 = 6^3 = 216$$

A vidíme, že ano.

Obecně napsáno

$$\boldsymbol{(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p}$$

Další příklady:

$$(5b^2et^7)^3 = 5^3b^{2\cdot3}e^3t^{7\cdot3} = 125b^6e^3t^{21}$$

$$(3k^2l)^3(kl^5m^7)^{11} = 3^3k^6l^3 \cdot k^{11}l^{55}m^{77} = 9k^{6+11}l^{3+55}m^{77} = 9k^{17}l^{58}m^{77}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

Jedná se o speciální případ předchozího pravidla.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = (3 \cdot 2^{-1})^3 = 3^3 \cdot 2^{(-1)\cdot3} = 3^3 \cdot 2^{-3} = 3^3 \cdot \frac{1}{2^3} = 27 \cdot \frac{1}{8} = \frac{27}{8}$$

Jednodušeji můžeme uvedený vztah dokázat takto:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3^3}{2^3}$$

Další příklady:

$$\left(\frac{3a}{b}\right)^3 = \frac{3^3a^3}{b^3} = \frac{9a^3}{b^3}$$

$$\left(\frac{1}{j}\right)^{-3} = \frac{1^{-3}}{j^{-3}} = \frac{j^3}{1^3} = \frac{j^3}{1} = j^3$$

Nula jako exponent

$\boldsymbol{a^0 = 1}\ ;\ \ \boldsymbol{a \neq 0}$

$5^0 = 1$

$(\frac{1}{3})^0 = 1$

$18356^0 = 1$

$\pi^0 = 1$

0^0 – není definováno

∞^0 – není definováno

Mocniny o základu 10

Např.:

$1\ 000 = 10^3$

$100\ 000 = 10^5$

$1\ 000\ 000 = 10^6$

$1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{27}$

$5\ 000 = 5 \cdot 1000 = 5 \cdot 10^3$

Je to vždy 10 na tolikátou, kolik je za prvním číslem (jedničkou) nul. Milion má šest nul – tedy 10^6.

Zápis pomocí exponentu je přehlednější a u velkých čísel rychlejší. Pohodlněji se s ním také počítá.

Př.:

Přibližná hmotnost Země zapsaná pomocí nul:

$5\ 970\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$ kg

Přibližná hmotnost Země zapsaná pomocí exponentu:

$5{,}97 \cdot 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \text{ kg} = \mathbf{5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg}$

Případně:

$597 \cdot 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 0 \text{ kg} = \mathbf{597 \cdot 10^{22}\ kg}$

$5970 \cdot 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \text{ kg} = \mathbf{5970 \cdot 10^{21}\ kg}$

To byla všechno velká čísla. Pomocí mocnin desíti lze zapisovat i čísla malá.

$0{,}001 = 10^{-3}$

$0{,}000\ 0001 = 10^{-6}$

Je to vždy 10 na tolikátou, kolik je míst za desetinnou čárkou.

Snadno to dokážeme, protože:

$$0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 1 \cdot 10^{-3} = 10^{-3}$$

Příklad:

$$\frac{50\,000 \ \cdot 20\,000}{5\,000\,000\,000} = \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^9} = \frac{5 \cdot 2}{5} \cdot 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-9} = 2 \cdot 10^{4\,+\,4\,-\,9} = 2 \cdot 10^{-1} = 0{,}2$$