Lineární rovnice

Lineární rovnice je matematický zápis, který můžeme (za pomoci ekvivalentních úprav) upravit na tvar $ax + b = 0$.

x … neznámá; při řešení rovnice ji určujeme (vyskytuje se pouze v první mocnině, tedy ne na druhou, na třetí, na jednu polovinu atd.)
a, b … libovolná reálná čísla

Ekvivalentní úpravy jsou takové úpravy, které nemění výsledek rovnice. Při použití neekvivalentních úprav (například umocňování) může dojít ke změně výsledku rovnice, a proto je nutné provést zkoušku (viz dále).
Reálné číslo je takové číslo, které můžeme zobrazit na číselné ose.

Je zápis $2x + 5 = 0$ lineární rovnice?

Na první pohled vidíme, že ano.
x … neznámá, a = 2 (reálné číslo), b = 5 (reálné číslo)

A jaké má rovnice řešení?

Abychom rovnici vyřešili, musímě určit hodnotu neznámé *x*.
Rovnici upravíme tak, že členy s *x* (v této rovnici se jedná o člen *2x*) necháme na jedné straně rovnice a ostatní členy (v této rovnici číslo 5) převedeme na stranu druhou:

$$2x = -5$$

Převedením čísla 5 na druhou stranu rovnice se změní jeho znaménko.

Při převodu členů z jedné strany rovnice na druhou se mění znaménka: + na – (a opačně) a **· na :** (a opačně)**.**

Na levé straně rovnice máme člen *2x*. Nás však zajímá, kolik se rovná *x*. Převedeme tedy dvojku také na druhou stranu rovnice. Jelikož na levé straně dvojkou neznámou *x* násobíme, po převedení na pravou stranu, budeme dvojkou dělit. Celou rovnici (levou a i pravou stranu) vlastně dělíme dvěma.
Výsledek tedy je:

$$\boldsymbol{x = -\frac{5}{2}}$$

Obecný zápis řešení lineární rovnice je $x = -\frac{b}{a}$, za podmínky, že a≠0. Nulou totiž dělit nelze. Pokud si do uvedené rovnice dosadíme za *a* nulu, zjistíme, že takový zápis nedává smysl.

A co zápis $2x - 6 = 0$? Je lineární rovnicí?
Již víme, že obecný zápis lineární rovnice je $ax + b = 0$, avšak v dané rovnici je -6. Ale i tato rovnice je

lineární, jelikož *odčítání je vlastně přičítání záporného čísla*. Můžeme tak psát $2x + (-6) = 0$. *Plus a mínus dává totiž mínus* a rovnice se tak nemění. Uvedená rovnice je tedy lineární.
Řešení tentokrát nechám na Vás. ;-)

Lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli

Společně si zkusíme vyřešit následující rovnici:

$$\mathbf{6 = \frac{3x}{x+2}}$$

Pokud se neznámá vyskytuje ve jmenovateli, musíme nejprve stanovit tzv. *podmínky řešitelnosti*. To jsou takové podmínky, za kterých má daný výraz smysl.
Náš výraz by neměl smysl, pokud by se jmenovatel rovnal nule – kdyby platilo $x + 2 = 0$. Na první pohled je vidět, že tento výraz (jedná se vlastně taky o lineární rovnici) je roven nule, když $x = -2$.
Aby tedy rovnice měla smysl, $x \neq -2$. To je podmínka řešitelnosti.

Nyní přejdeme k samotnému řešení rovnice.

Nejprve se zbavíme zlomku na pravé straně tak, že jmenovatel $x + 2$ převedeme na levou stanu rovnice. Jelikož na pravé straně rovnice výrazem $x + 2$ dělíme, po přesunutí na stranu pravou, jím budeme násobit (celou rovnici vlastně vynásobíme výrazem $x + 2$):

$$6 \cdot (x + 2) = 3x$$

Závorku roznásobíme (číslem 6 vynásobíme každý člen v závorce):

$$6x + 12 = 3x$$

$3x + 12 = 0$ (z tohoto tvaru vidíme, že se jedná o lineární rovnici ve tvaru $ax + b = 0$)

$$3x = -12$$

$$x = -\frac{12}{3}$$

$$\mathbf{x = -4}$$

Vidíme, že výsledek není v rozporu s podmínkou řešitelnosti a tudíž řešením rovnice je číslo -4.

Neekvivalentní úpravy a zkouška

Pokud při úpravě rovnic provádíme tzv. neekvivalentní úpravy (umocňování), je třeba provést zkoušku.

Rovnice:

$$\mathbf{\sqrt{x-1} = -1}$$

Dále ji upravíme:

$x - 1 = 1$ (obě strany jsme umocnili na druhou, což ale je neekvivalentní úprava)

$\boldsymbol{x = 2}$

Dostali jsme výsledek, avšak jelikož jsme provedli neekvivalentní úpravu, je potřeba provést zkoušku. Dosadíme tedy výsledek nejprve do pravé strany rovnice, a pak porovnáme s levou stranou rovnice.

Zk.:
$L = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$ (levá strana rovnice)
$P = -1$ (pravá strana rovnice)
$L \neq P$ (levá strana rovnice se nerovná pravé straně rovnice)

Ze zkoušky tak vidíme, že *rovnice nemá řešení*. To, že rovnice nemá řešení, je však vidět na první pohled, jelikož výraz pod odmocninou nemůže být záporný.

Rovnice navíc není lineární. Sice lze upravit na tvar $x - 2 = 0$, což odpovídá obecnému zápisu lineární rovnice $ax + b = 0$, avšak takto ji upravíme pomocí neekvivalentních úprav.

Pokud si nejsme jisti, zda jsme provedli či neprovedli během úpravy rovnice neekvivalentní úpravu, je dobré provést zkoušku, abychom si výpočet ověřili.

Užití rovnic

Podívejme se na následující úlohu:

Lahev s pitím stojí 50 Kč. Pití je o 40 Kč dražší než prázdná lahev. Kolik stojí samotná lahev.

I když to může na první pohled svádět, že lahev stojí 10 Kč, není tomu tak.

Označme cenu lahve písmenem *l*. (Pro neznámou můžeme použít libovolné písmeno. V abecedě máme totiž i jiná písmena než *x*.)

Ze zadání víme, že cena pití je o 40 korun vyšší. K ceně lahve *l* je tedy potřeba přičíst 40 Kč, abychom dostali cenu samotného pití. Tedy cena samotného pití je $l + 40\ (K\check{c})$.

Máme tedy:
l … cena lahve
$l + 40\ (K\check{c})$ … cena samotného pití (bez lahve)

Cena lahve s pitím je 50 Kč. Rovnici tedy sestavíme následovně:

$$l + l + 40 = 50$$

Rovnici dále řešíme:
$2l + 40 = 50$

$2l = 10$
$\boldsymbol{l = 5\ (K}\text{č})$

Cena lahve je 5 Kč.