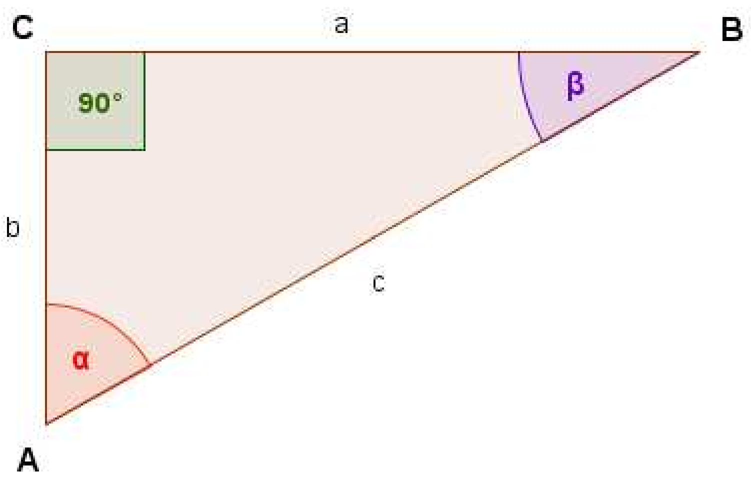
Goniometrie – trigonometrie

Goniometrie se zabývá funkcemi *sinus*, *kosinus*, *tangens*, *kotangens* (goniometrické funkce).
V tomto článku se budeme zabývat trigonometrií (součást goniometrie) – používáním goniometrických funkcí při výpočtech velikostí úhlů a stran trojúhelníků. Konkrétně se budeme zabývat, „jak to chodí“ v pravoúhlém trojúhelníku.

Sinus



Sinus úhlu (α, β) v pravoúhlém trojúhelníku je roven poměru délky protilehlé odvěsny (k danému úhlu) ku délce přepony.
Hovorově se pak říká, že *sinus* úhlu v pravoúhlém trojúhleníku je *protilehlá ku přeponě*.

Protilehlá odvěsna k úhlu β je na obrázku označena písmenem *b*. Přepona je označena písmenem *c*.
Sinus úhlu β se tedy dá zapsat jako:

$$\boldsymbol{\sin\beta = \frac{b}{c}}$$

Pokud známe velikost stran *b* a *c*. můžeme vypočítat velikost úhlu β. Nebo pokud známe velikost úhlu a jedné ze stran, můžeme vypočítat velikost příslušné strany. Ukážeme si to na příkladech:

Velikost protilehlé odvěsny k úhlu beta je 5 centimetrů, velikost přepony je 10 centimetrů. Vypočítejte velikost úhlu β.

Označíme si protilehlou odvěsnu třeba zase jako *b* a přeponu jako *c* (použijeme tedy stejné označení jako na obrázku na začátku článku).
b = 5 cm, c = 10 cm, β = ?

$$\boldsymbol{\sin\beta = \frac{b}{c}}$$

$$sin\,\beta = \frac{5}{10}$$

$$sin\,\beta = \frac{1}{2} \qquad \boldsymbol{\beta = 30}\,°$$

Ze zápisu $sin\,\beta = \frac{1}{2}$ je totiž vidět, že úhel β se rovná 30 °. Sinus 30 ° je totiž jedna polovina (vizte tabulku na konci článku, kterou je vhodné se naučit nazpaměť – rychleji se nám pak bude počítat). Ale co když tabulku neumíme, případně si nejsme jisti? Nebo když se $sin\,\beta$ rovná hodnotě, pro kterou hodnotu úhlu neznám zpaměti. Jak na to přijdu?

Ukažme si to na obecném příkladu, kdy se sinus úhlu beta bude rovnat nějaké hodnotě *x*.

$$sin\,\beta = x$$

Úhel beta se pak vypočítá následovně:

$$\beta = arcsin\,x$$

V našem příkladě pak

$$\beta = arcsin\,\frac{1}{2}$$

Arcsin je označení pro funkci *arkus sinus,* což je inverzní funkce k funkci *sinus*. Na kalkulačce bývá označována jako $\sin^{-1}$ (sinus na mínus první) a bývá „schována“ pod stejným tlačítkem jako funkce sinus. Pokud však chceme počítat funkci $\sin^{-1}$ je potřeba zmáčknout tlačítko (někdy má žlutou barvu) označené jako *2ndF* (zkratka z anglického *Second Function* – druhá funkce). Tak vypočítáme velikost samotného úhlu.

Mrkneme se na další příklad

Velikost úhlu alfa je 60 °. Délka přepony je 14 centimetrů. Určete velikost protilehlé odvěsny k úhlu alfa.

Přeponu si označíme písmenem *c* a odvěsnu písmenem *a* (použijeme tedy stejné označení jako na obrázku na začátku článku).
α = 60 °, c = 14 cm, a = ?

$$\boldsymbol{sin\,\alpha = \frac{a}{c}}$$

$$c = \frac{a}{sin\,\alpha}$$

$$c = \frac{14}{sin\,60\,°}\,cm - dosazujeme\ již\ konkrétní\ hodnoty, je\ proto\ potřeba\ uvést\ jednotky$$

$$c = \frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,cm = \frac{2 \cdot 14}{\sqrt{3}}\,cm = \frac{28}{\sqrt{3}}\,cm$$

Sinus 60 ° je $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (opět vizte tabulku na konci článku).

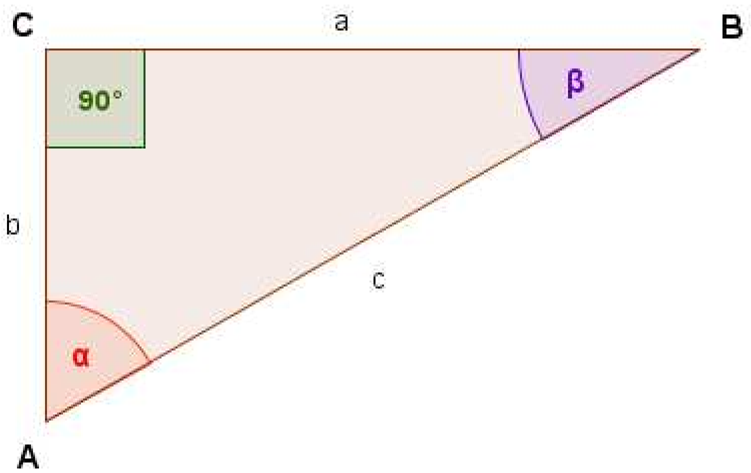
Výsledek však ještě upravíme, protože se nám ve jmenovateli vyskytuje odmocnina. Hodnota takového výrazu (který má odmocninu ve jmenovateli) se totiž těžko odhaduje a my tak ztrácíme představu, kolik takové číslo vlastně je a zda je náš výpočet vůbec možný. Výraz tedy upravíme tak, že ho rozšíříme výrazem, který je ve jmenovateli. V našem případě tedy odmocninou ze tří. Rozšíření spočívá v tom, že čitatel i jmenovatel vynásobíme stejným výrazem – odmocninou ze tří.

$$c = \frac{28}{\sqrt{3}}\ cm = \frac{28 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}\ cm = \frac{28\sqrt{3}}{3}\ cm = \mathbf{28\frac{\sqrt{3}}{3}}\ \boldsymbol{cm}$$

Výsledek, který jsme získali je přesný. Přibližný výsledek, zaokrouhlený na dvě desetinná místa, pak je:

$$\boldsymbol{c \doteq 16,17\ cm}$$

Kosinus



Sinus úhlu (α, β) v pravoúhlém trojúhelníku je roven poměru délky přilehlé odvěsny (k danému úhlu) ku délce přepony.

Hovorově se pak říká, že *kosinus* úhlu v pravoúhlém trojúhleníku je *přilehlá ku přeponě*.

$$\boldsymbol{\cos\beta = \frac{a}{c}}$$

Tangens

Tangens úhlu (α, β) v pravoúhlém trojúhelníku je roven poměru délky protilehlé odvěsny (k danému úhlu) ku délce přilehlé odvěsny (k danému úhlu).
Hovorově se pak říká, že *tangens* úhlu v pravoúhlém trojúhleníku je *protilehlá ku přilehlé*.

$$\boldsymbol{tg\ \beta = \frac{b}{a}}$$

Kotangens

Kotangens úhlu (α, β) v pravoúhlém trojúhelníku je roven poměru délky přilehlé odvěsny (k danému úhlu) ku délce protilehlé odvěsny (k danému úhlu).
Hovorově se pak říká, že *kotangens* úhlu v pravoúhlém trojúhleníku je *přilehlá ku protilehlé*.

$$\boldsymbol{cotg\ \beta = \frac{a}{b}}$$

Na kalkulačce sice funkci *kotangens* nemáme, ale zcela si vystačíme s funkcí *tangens*. Pokud se totiž podíváme na to, čemu funkce *tangens* a *kotangens* rovnají, zjistíme, že funkce *kotangens* je totiž „převrácená“ funkce *tangens*:

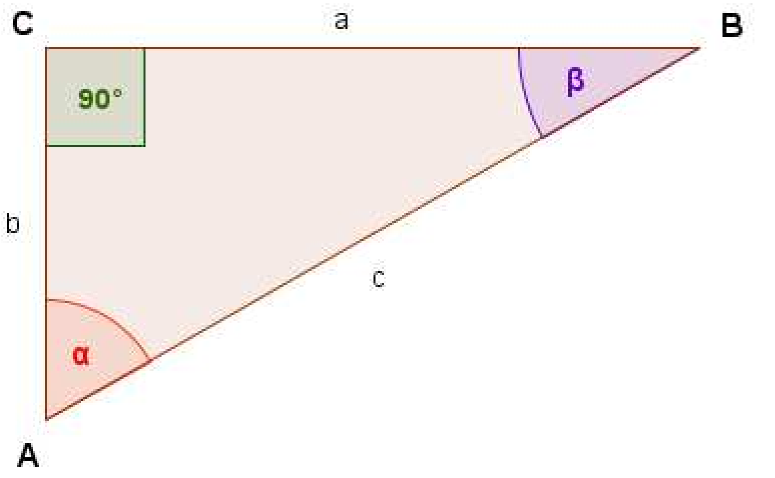
$$\frac{1}{cotg\ \beta} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} = tg\ \beta$$

Platí to samozřejmě i naopak:

$$\frac{1}{tg\ \beta} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b} = cotg\ \beta$$

Pokud tedy chceme na kalkulačce vypočítat funkci *kotangens*, vypočítáme *převrácenou hodnotu* funkce *tangens* (Jedničku vydělíme funkcí *tangens*).

Další souvislosti mezi goniometrickými funkcemi



V následujících úpravách budeme vycházet z tohoto obrázku. Ukážeme si několik vztahů mezi goniometrickými funkcemi, která nejčastěji využijeme při výpočtech.

$$sin\,\beta = \frac{b}{c}$$

$$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\boldsymbol{sin\,\beta = cos\,\alpha}$$

A také:

$$\boldsymbol{sin\,\alpha = cos\,\beta}$$

$$tg\,\beta = \frac{b}{a}$$

$$cotg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\boldsymbol{tg\,\beta = cotg\,\alpha}$$

A také:

$$\boldsymbol{tg\,\alpha = cotg\,\beta}$$

Také platí:

$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b\cdot c}{a\cdot c} = \frac{b}{a} = tg\,\beta$$

$$\boldsymbol{tg\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

Samozřejmě, že platí i

$$\boldsymbol{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Jelikož je

$$\frac{1}{tg\,\beta} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b} = cotg\,\beta$$

můžeme napsat

$$cotg\,\beta = \frac{1}{tg\,\beta} = \frac{1}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

Tedy

$$\boldsymbol{cotg\,\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}} \quad a\ samozřejmě,\ že\ i \quad \boldsymbol{cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Tabulka, kterou je výhodné si zapamatovat…

…pak se nám bude snadněji a rychleji počítat.

	30 °	*45 °*	*60 °*
sinus	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
kosinus	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$
tangens	$tg\ 30\ ° = \frac{sin\ 30\ °}{cos\ 30\ °} = = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}\ (rozšířili\ jsme\ \sqrt{3})$	$tg\ 45\ ° = \frac{sin\ 45\ °}{cos\ 45\ °} = = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \mathbf{1}$	$tg\ 60\ ° = \frac{sin\ 60\ °}{cos\ 60\ °} = = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \mathbf{\sqrt{3}}$
kotangens	$cotg\ 30\ ° = \frac{cos\ 30\ °}{sin\ 30\ °} = = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 1} = \mathbf{\sqrt{3}}$	$cotg\ 45\ ° = \frac{cos\ 45\ °}{sin\ 45\ °} = = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \mathbf{1}$	$cotg\ 60\ ° = \frac{cos\ 60\ °}{sin\ 60\ °} = = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}\ (rozšířili\ jsme\ \sqrt{3})$

Tabulka ještě jednou…

…tentokrát pouze se samotnými hodnotami.

	30 °	*45 °*	*60 °*
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
kosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangens	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
kotangens	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$