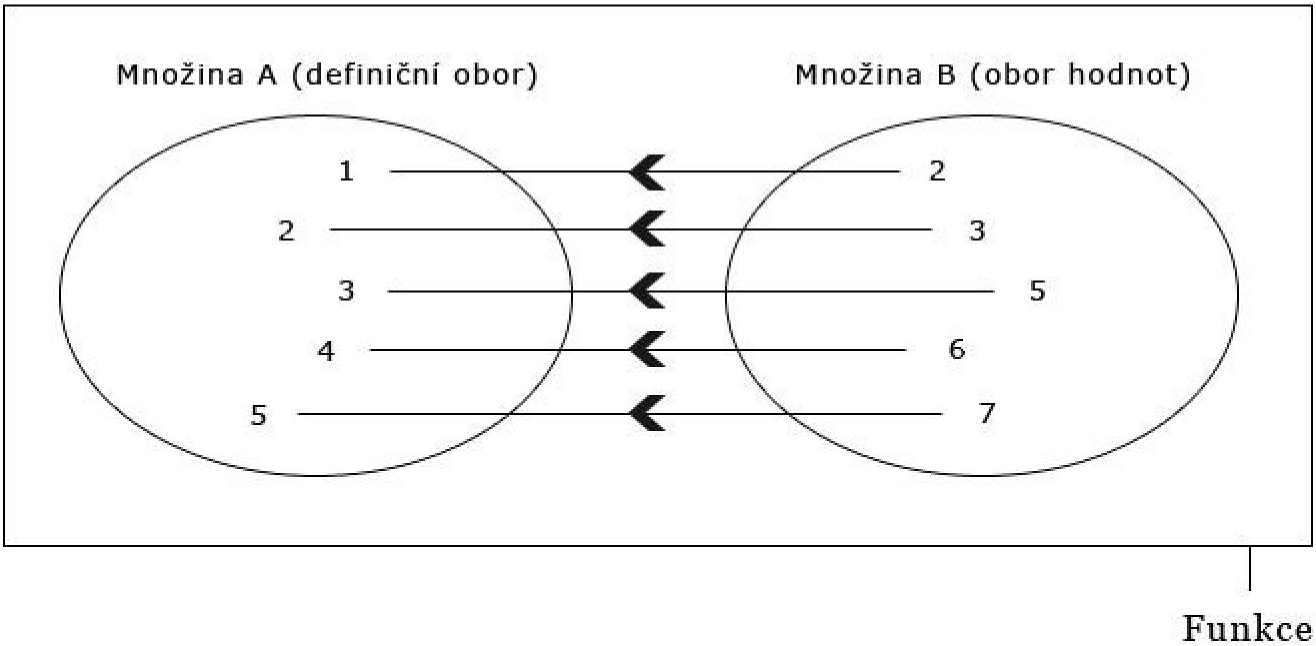
Funkce – úvod

Co je funkce

Funkce je předpis, který číslu z množiny A přiřazuje *právě jedno* číslo z množiny B. Množina A je definiční obor funkce a množina B je obor hodnot funkce.

Že tuto definici znáte, ale stále přesně nevíte, jak funkci chápat? Ukážeme si konkrétní příklad…



1	2	3	4	5	Definiční obor (množina A)
2	3	5	6	7	Obor hodnot (množina B)

Číslům z množiny A jsme přiřadili čísla z množiny B. Každému číslu z množiny A jsme přiřadili *právě jedno* číslo z množiny B. *Právě jedno* znamená, že třeba číslu 3 z množiny A jste přiřadili jen a pouze číslo 5. Pokud bychom číslu 3 (nebo i jinému) přiřadili kromě čísla 5 ještě další číslo, nejednalo by se už o funkci. Proto je důležité v definici mít *právě jedno*.

Zápis funkce

Obecně funkci zapisujeme $y = f(x)$ → y je funkcí x.

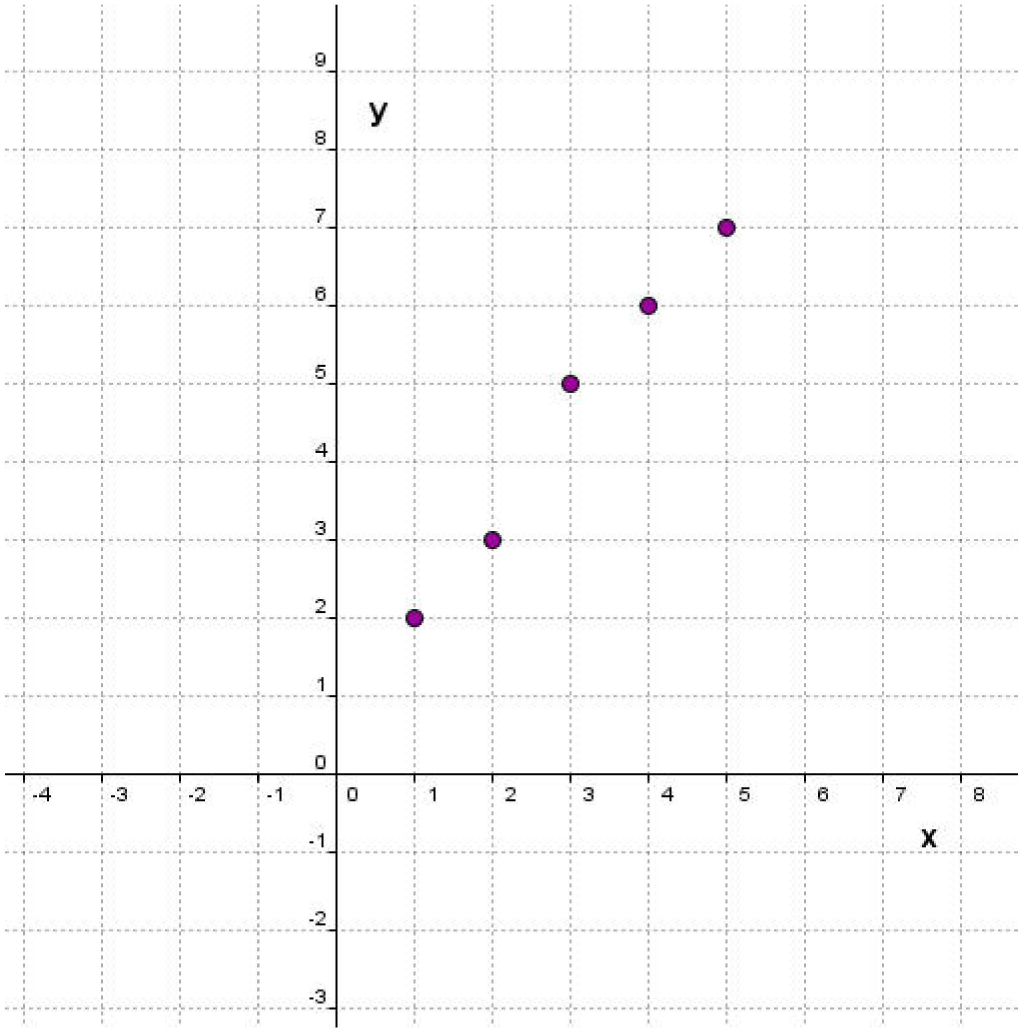
x … v grafu (viz dále) jej vynášíme na osu x
y … v grafu (viz dále) jej vynášíme na osu y

Pro výše uvedenou funkci na obrázku tedy platí:
x = {1; 2; 3; 4; 5} = D_f (definiční obor funkce f)
y = {2; 3; 5; 6; 7 } = H_f (obor hodnot funkce f)

Graf funkce

1	2	3	4	5	Definiční obor (množina A) – v grafu čísla na ose x
2	3	5	6	7	Obor hodnot (množina B) – v grafu čísla na ose y

Čísla na ose x a jemu příslušné číslo na ose y pak tvoří souřadnice bodů dané funkce. První pod v grafu níže tak má souřadnice 1 a 2 – první je „ixová“ souřadnice a druhá je „ypsilonová“ souřadnice. Pokud bychom první bod označili třeba písmenem A (v grafu tak ale není označen), dal by se tento bod zapsat jako A [1; 2].



Grafem je pouze těchto pět bodů. Kdybychom je spojili, jednalo by se už o jinou funkci, jejíž definiční obor by byla všechna čísla od 1 včetně do 5 včetně. Jelikož jich je nekonečně mnoho, do tabulky bychom je už nedostali.

Mějme funkci *f*, pro kterou platí:

$f: y = 2x$

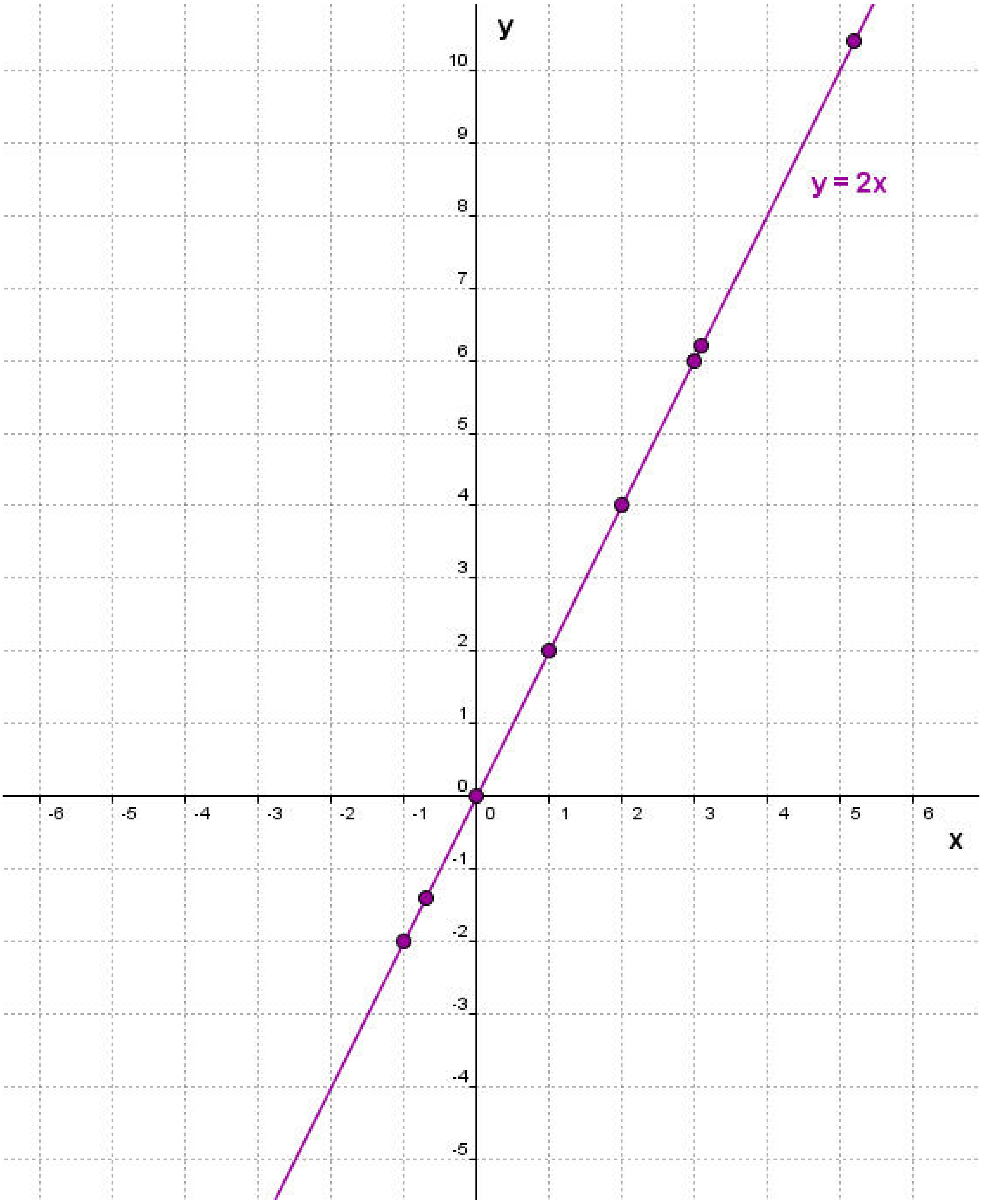
Pozn.: Jedná se konkrétně o lineární funkci, ale tím si zatím nemusíme lámat hlavu (bude probráno v dalších kapitolách).

Jak vidíme, číslo y je vždy dvojnásobkem čísla x. Jedničce na ose x tedy přiřadíme dvojku, dvojce přiřadíme čtyřku atd.

x	…	-1	-0,7	0	1	2	3	3,1	5,2	…	Definiční obor (v grafu čísla na ose x)
y = 2x	…	-2	-1,4	0	2	4	6	6,2	10,4	…	Obor hodnot (v grafu čísla na ose y)

Pokud není řečeno jinak, jsou u této funkce definičním oborem všechna reálná čísla.
Výraz $y = 2x$ totiž dává smysl pro všechna *x* reálná ($x \in R$). Oborem hodnot jsou také všechna reálná čísla.

Graf této funkce vypadá následovně (viz další strana):



Graf funkce (přesněji řečeno část grafu funkce) $y = 2x, x \in R$.

$D_f = R;\ H_f = R$

V grafu jsou zvýrazněny body z tabulky.

Nyní mějme třeba funkci *g*, pro kterou platí:

$$g: y = \frac{x}{x-3}$$

Definiční obor této funkce (pokud by opět nebylo řečeno jinak) by pak byla všechna reálná čísla kromě trojky. Pokud by se totiž *x* rovnalo třem, dostali bychom ve jmenovateli zlomku nulu. Jelikož však nulou nelze dělit, výraz $y = \frac{x}{x-3}$ pro *x = 3* nedává smysl. Funkce tedy v tomto bodě není definována.

Definičním oborem této funkce je tedy množina reálných čísel vyjma čísla 3. Graf funkce se bude k hodnotě 3 na ose *x* pouze přibližovat (viz obrázek na následující stránce).

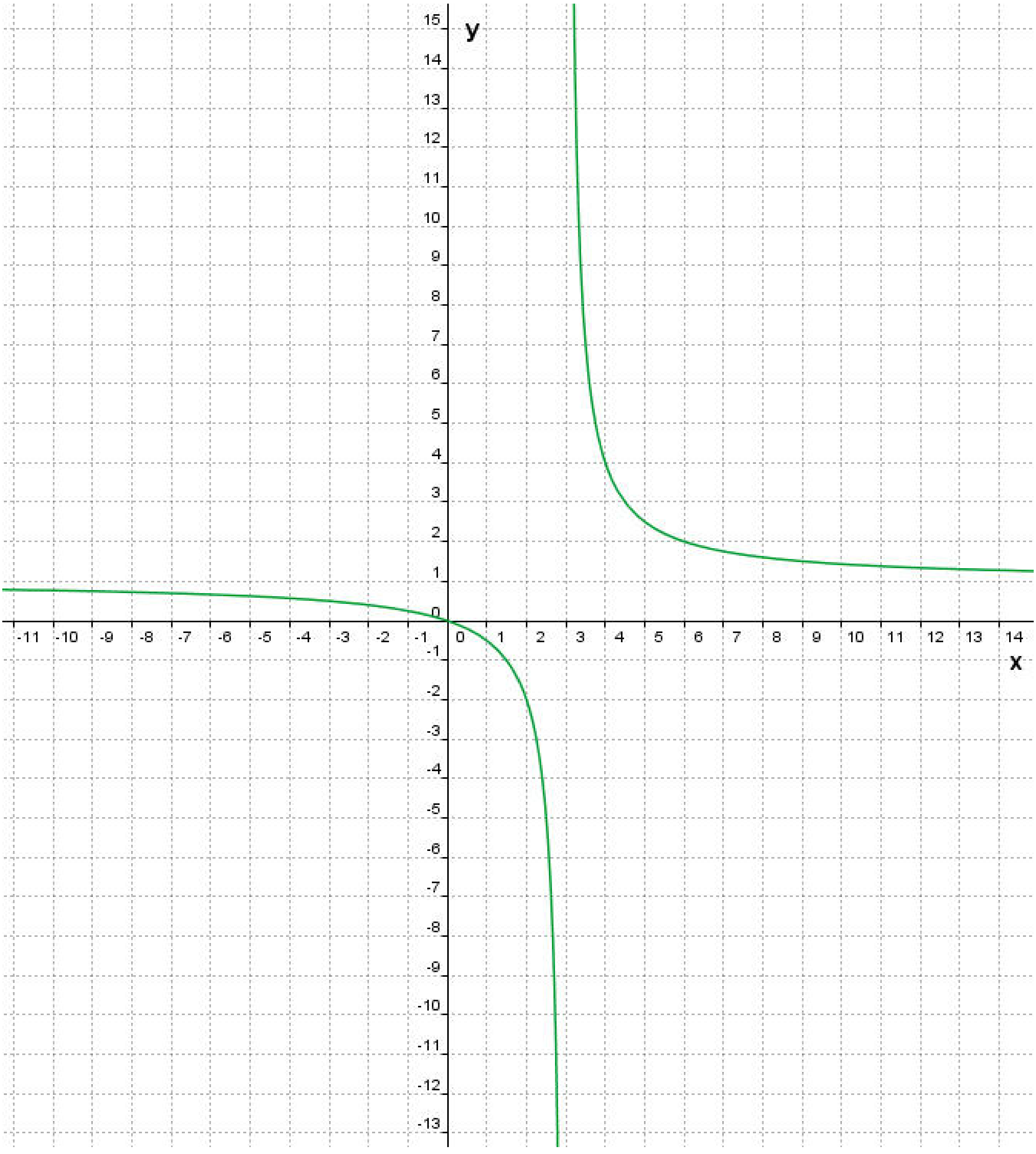
$$D_g = R - \{3\}$$

Definiční obor jsou tedy všechna čísla, která když dosadíme do výrazu funkce za x, tak daný výraz dává smysluplný výsledek.

Oborem hodnot jsou pak všechna reálná čísla kromě čísla 1. K hodnotě 1 na ose *y* se graf opět pouze blíží. Čím větší (kladné i záporné) číslo budeme do výrazu funkce dosazovat, tím blíže číslu 1 nám ypsilon vyjde. Jedničky však nedosáhneme.

$$H_g = R - \{1\}$$

Pozn.: Uvedená funkce se nazývá lineární lomená a bude podrobněji probrána v jedné z následujících kapitol.



Graf funkce $y = \frac{x}{x-3}, x \in (-\infty;\ 3) \cup (3;\ \infty)$.

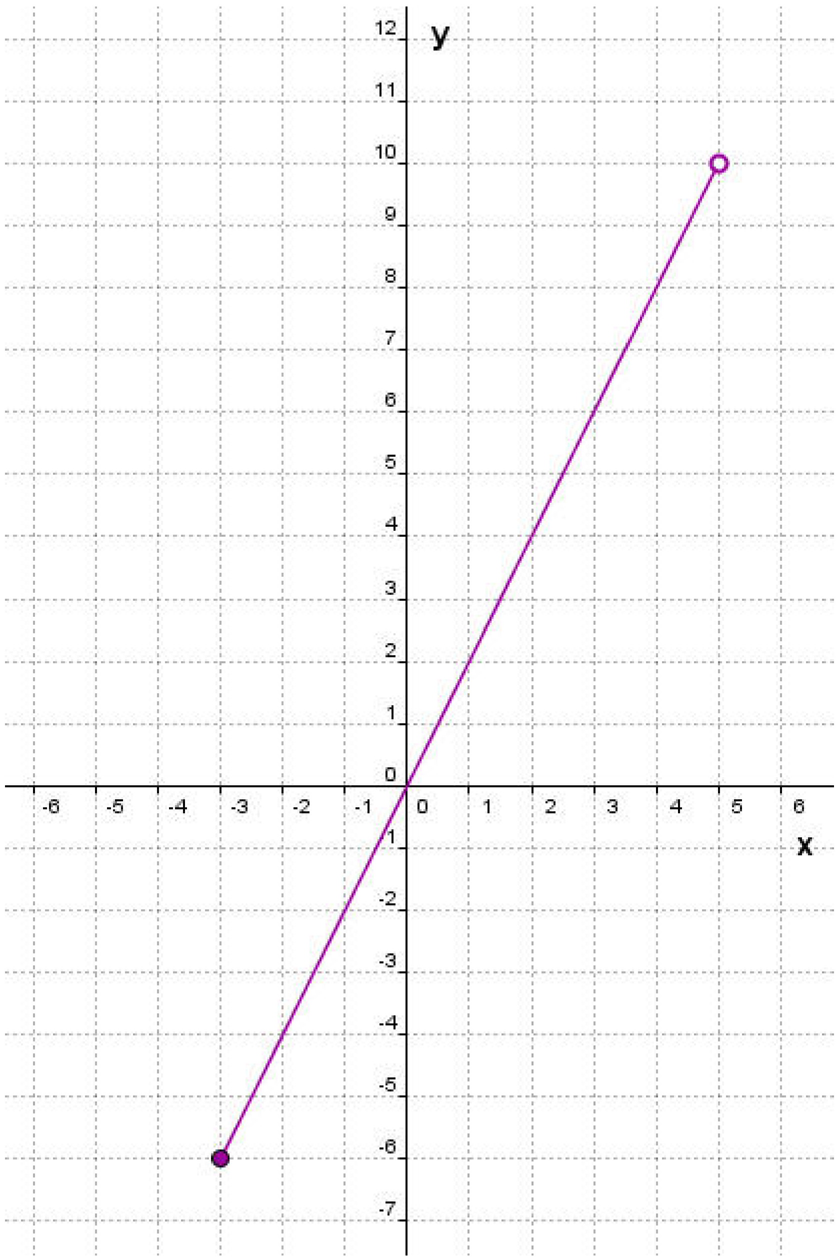
$D_g = R - \{3\};\ H_g = R - \{1\}$

Definiční obor můžeme také omezit:

$f: y = 2x, D_f = R$ … pokud není řečeno jinak, definičním oborem jsou všechna reálná čísla, jedná se o tzv. *maximální definiční obor*

$f: y = 2x, D_f = < -3;\ 5)$ … definiční obor je v tomto případě v intervalu od -3 včetně do 5 bez

Je tak možné nakreslit úplně celý graf funkce:

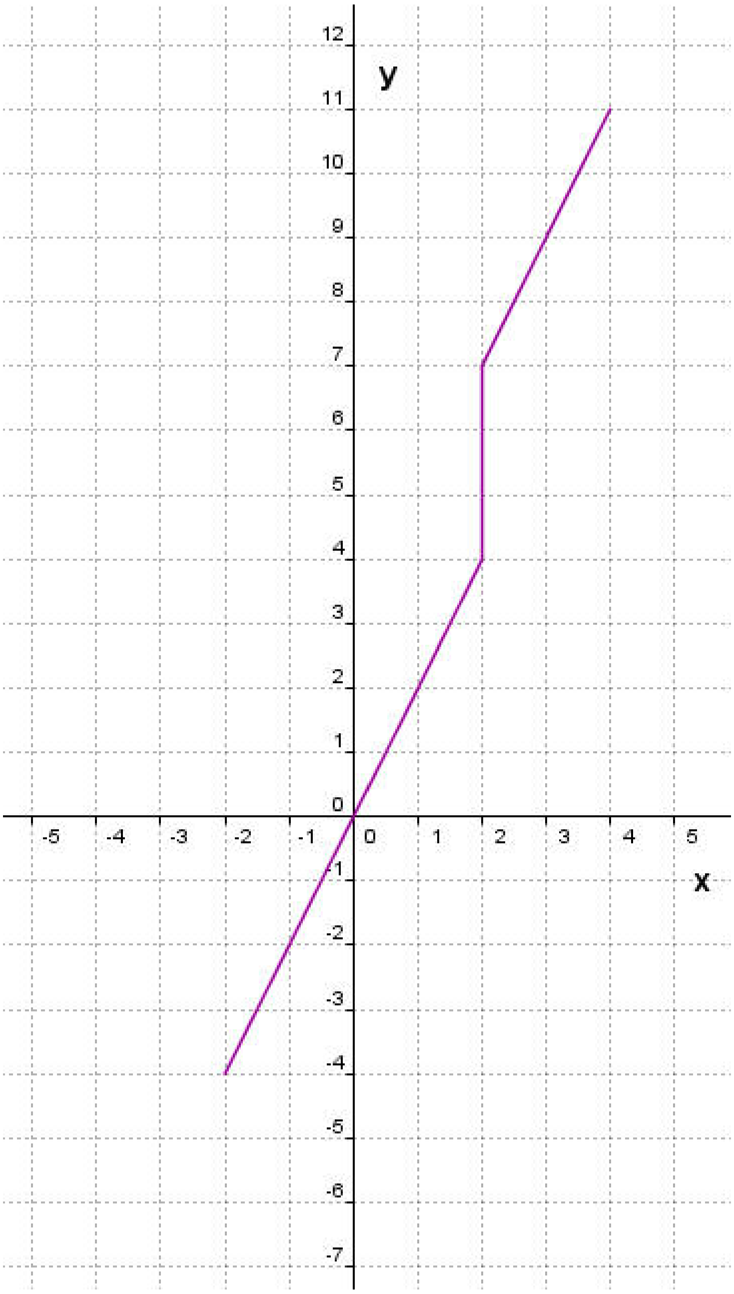


Graf funkce $y = 2x, x \in < -3;\ 5)$

$D_f = < -3;\ 5);\ H_f = < -6;\ 10)$

Plné kolečko značí, že bod [-3; 6] do grafu ještě patří. Prázdné kolečko pak značí, že bod [5; 10] do grafu funkce již nepatří.

Graf, který není funkcí…

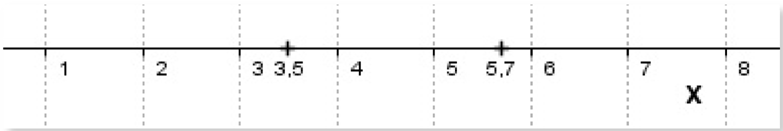


Pokud lze nalézt takovou rovnoběžku s osou *y*, která v některém místě (stačí jedno) protne graf ve více než jednom bodě (na uvedeném obrázku by se jednalo o rovnoběžku s osou *y* procházející číslem dvě na ose *x*), nejedná se o funkci. Odporuje to totiž definici, kdy číslu z množiny A (číslo na ose *x*) je přiřazeno ***právě jedno*** číslo z množiny B (číslo na ose *y*). Na obrázku tedy není graf funkce, jelikož číslu 2 jsou přiřazena čísla od 4 do 7 (tedy nekonečně mnoho čísel, což není *právě jedno*).

Jak kreslit grafy funkcí (souřadnicové osy)…

Čísla na osách *x* a *y* volíme v *pravidelných* intervalech. Interval ale nemusí být po jedničce, jak je níže na obrázku, ale třeba po jedné polovině, po dvou třetinách atd. Body, které jsou mimo stanovené intervaly, na osy nevynášíme.

Špatně:



Správně: