Gumový míček „hopík“ jsme hodili na zem z výšky 90 cm. Z ruky nám vyletěl rychlostí 8 m · s^{-1}.
Do jaké výšky se odrazil od země, pokud srážka míčku se zemí byla dokonale pružná? Do výpočtů dosazujte hodnotu tíhového zrychlení 10 m · s^{-2}.

---

*Jedná se o krásnou úlohu na **zákon zachování mechanické energie** (ZZME).*
Podle tohoto zákona je součet potenciální a kinetické energie míčku v okamžiku, kdy opouští naši ruku stejný, jako v okamžiku, kdy se nachází v největší výšce (tu máme zjistit) po odrazu. Součet potenciální a kinetické energie je stejný (konstantní) po celou dobu pohybu míčku, ale my se zaměříme jen na okamžik při výhozu z ruky a okamžik, kdy dosáhne maximální výšky po odrazu, protože tak můžeme určit výšku výskoku míčku.

Poslední větička v zadání nám říká, že při srážce míčku se zemí nedošlo ke ztrátám mechanické energie (míček se dokonale odrazil), například mírným zahřátím podlahy a míčku, a my tak můžeme k výpočtu použít ZZME.

I. Okamžik, kdy míček opouští naši ruku:

$E_{k_1} = \frac{1}{2}mv_0{}^2$ kinetická energie; v_0 – rychlost, kterou nám míček vyletěl z ruky

$E_{p_1} = mgh_1$ potenciální energie; h_1 – výška, ze které jsme míček hodili

$\boldsymbol{E_I = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + mgh}$ celková energie v daném okamžiku

II. Okamžik, kdy se míček po odrazu od země nachází v maximální výšce:

$E_{k_2} = 0$ kinetická energie, míček se v tomto místě zastaví

$E_p = mgh_2$ potenciální energie, h_2– maximální výška po odrazu, tu hledáme

$\boldsymbol{E_{II} = 0 + mgh = mgh_2}$ celková energie v daném okamžiku

ZZME tedy říká:

$$\boldsymbol{E_I = E_{II}}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_0{}^2 + mgh = mgh_2}$$

Z této rovnice si vyjádříme $\boldsymbol{h_2}$ a dostaneme výsledek.

$$h_2 = \frac{\frac{1}{2}mv^2 + mgh_1}{mg} = \frac{m\left(\frac{1}{2}v^2 + gh_1\right)}{mg} = \frac{\frac{1}{2}v^2 + gh_1}{g} = \frac{v^2 + 2gh_1}{2g}$$

Dosadíme.

$$h_2 = \frac{8^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}9}{2 \cdot 10}\ m = \frac{64 + 18}{20}\ m = \frac{82}{20}\ m = 4{,}1\ m$$

Míček se odrazí do maximální výšky 4,1 metru od země.

Příklad jde řešit i jiným způsobem; méně elegantním, delším a těžším. Mně se ale paradoxně tento druhý způsob líbí více.

Pokud totiž víme, že při odrazu od země nedošlo ke ztrátám mechanické energie, je rychlost dopadu míčku na podlahu stejná, jako rychlost odrazu. Vypočítáme-li tedy rychlost dopadu, získáme tak rychlost odrazu a pomocí této rychlosti a vztahu pro výpočet největší výšky výstupu při vrhu svislém vzhůru získáme i maximální výšku, do které se míček odrazil.
Ale pěkně popořádku.

Pro výpočet maximální výšky, do které míček po odrazu vystoupí, použijeme vztah (odvozovat si ho ale nebudeme)

$$h = \frac{v^2}{2g},$$

kde v je v našem případě rychlost dopadu na zem (odrazu od země). Tu zatím neznáme, tak si ji spočteme. V okamžiku, kdy míček opustí naši ruku, jedná se o *rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb s nenulovou počáteční rychlostí*. Zrychlený proto, že na něj působí tíhová síla a ta mu udává tíhové zrychlení g.
Pro rychlost a dráhu platí následující vztahy:

$$v = v_0 + gt$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

v_0 – rychlost, kterou nám míček vyletěl z ruky, t – doba, za kterou dopadl na zem, v – rychlost dopadu/odrazu, s – výška ze, které jsme míček hodili, g – tíhové zrychlení

Z druhé rovnice si vyjádříme a vypočítáme dobu, za kterou míček doletí z naší ruky na zem.
Tu dosadíme do první rovnice, dostaneme rychlost dopadu a zároveň tedy i rychlost odrazu, dosadíme do výše uvedeného vztahu pro výpočet maximální výšky a výsledek je na světě. :-)
Ale zase pěkně popořadě.

Pokud chceme z druhé rovnice vyjádřit dobu dopadu na zem, musíme řešit kvadratickou rovnici. Dosadíme za známé veličiny a rovnici dále upravíme.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$0{,}9 = 8\{t\} + \tfrac{1}{2} 10\{t\}^2$$ *// Složené závorky nám říkají, že se zabýváme pouze číselnou hodnotou času (doby); nemusíme se tedy nyní zabývat jednotkami.*

$$0{,}9 = 8\{t\} + 5\{t\}^2$$

$$5\{t\}^2 + 8\{t\} - 0{,}9 = 0$$

Nyní použijeme známý vzorec pro nalezení kořenu kvadratické rovnice:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 5 \cdot 0{,}9}}{10}\ s = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 18}}{10}\ s = \frac{-8 \pm \sqrt{82}}{10}\ s$$

Na první pohled je vidět, že jeden z kořenů vyjde záporný, nemusíme se jím tedy dále zabývat, jelikož záporný čas nedává smysl.

Druhý kořen pak číselně je

$$\frac{-8 + \sqrt{82}}{10}$$

Nebudeme dopočítávat, ale rovnou dosadíme. Pokud bychom ho totiž dopočítali, kvůli zaokrouhlování bychom dostali nepatrně jiný výsledek, než pomocí prvního postupu. My to však chceme přesně stejně. :-)

Získaný mezivýpočet tedy dosadíme do rovnice $v = v_0 + gt$ za t.

$$v = 8 + 10 \cdot \frac{-8 + \sqrt{82}}{10}\ m \cdot s^{-1} = 8 - 8 + \sqrt{82}\ m \cdot s^{-1} = \sqrt{82}\ m \cdot s^{-1}$$

A nyní dosadíme do rovnice pro výpočet hledané výšky.

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$h = \frac{\sqrt{82}^{\,2}}{2 \cdot 10}\ m = \frac{82}{20}\ m = 4{,}1\ m$$

Míček se odrazí do maximální výšky 4,1 metru od země.

P. S.: Že neuhodnu, který způsob výpočtu se Vám líbí více? ;-)