V jaké výšce nad povrchem Země je hodnota gravitačního zrychlení poloviční oproti hodnotě gravitačního zrychlení na povrchu Země?

Hezký příklad na procvičení kvadratické rovnice.

Gravitační síla podle Newtonova gravitačního zákona, kterou je těleso přitahováno na povrchu Země:

$$F_g = G\frac{mM_Z}{{R_Z}^2}$$

G … gravitační konstanta (≐ $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2})

m … hmotnost tělesa

M_Z … hmotnost Země

R_Z … poloměr Země

Gravitační zrychlení, které Země tělesu na svém povrchu uděluje je pak podle 2. Newtonova pohybového zákona:

$$\boldsymbol{a_g = \frac{F_g}{m} = G\frac{M_Z}{{R_Z}^2}}$$

V určité výšce nad povrchem Země je pak gravitační zrychlení poloviční; platí tedy:

$$\boldsymbol{\frac{a_g}{2} = G\frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}}$$

h … výška nad povrchem Země; neznámá, kterou hledáme

Získali jsme tedy dvě rovnice:

$$\boldsymbol{a_g = G\frac{M_Z}{{R_Z}^2}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a_g}{2} = G\frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}}$$

Z druhé rovnice si vyjádříme $\boldsymbol{a_g}$ a dosadíme do rovnice první. Tu pak vyřešíme.

$$a_g = 2G\frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}$$

$$G\frac{M_Z}{{R_Z}^2} = 2G\frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}$$

Zkrátíme stejné veličiny…

$$\frac{1}{{R_Z}^2} = \frac{2}{(R_Z + h)^2}$$

$$\frac{1}{{R_Z}^2} = \frac{2}{{R_Z}^2 + 2R_Z h + h^2}$$

$${R_Z}^2 + 2R_Z h + h^2 = 2{R_Z}^2$$

$$h^2 + 2R_Z h - {R_Z}^2 = 0$$

Řešíme tuto kvadratickou rovnici (neznámá je h).

$$h_{1,2} = \frac{-2R_Z \pm \sqrt{4{R_Z}^2 + 4{R_Z}^2}}{2} = \frac{-2R_Z \pm \sqrt{2 \cdot 4{R_Z}^2}}{2} = \frac{-2R_Z \pm 2R_Z\sqrt{2}}{2} = -R_Z \pm R_Z\sqrt{2}$$

$$h_1 = -R_Z + R_Z\sqrt{2} = R_Z\sqrt{2} - R_Z$$

$$\boldsymbol{h_1 = R_Z(\sqrt{2} - 1)}$$

$$h_2 = -R_Z - R_Z\sqrt{2} = -R_Z\sqrt{2} - R_Z$$

$$\boldsymbol{h_2 = R_Z(-\sqrt{2} - 1)}$$

Jelikož druhý výraz nedává fyzikální smysl, výsledkem je:

$$\boldsymbol{h = R_Z(\sqrt{2} - 1)}$$

Dosadíme-li za poloměr Země přibližnou hodnotu 6400 km, dostaneme:

$$h = 6400 \cdot 10^3\left(\sqrt{2} - 1\right) m$$

$$\boldsymbol{h \approx 2651\ km}$$

Poloviční hodnota gravitačního zrychlení oproti hodnotě gravitačního zrychlení na povrchu Země je ve výšce přibližně 2651 km.