Kvadratická rovnice

Kvadratická rovnice je matematický zápis, který můžeme (za pomoci ekvivalentních úprav) upravit na tvar

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$.

x … neznámá; v kvadratické rovnici se vyskytuje umocněná na druhou (neznámou nemusí být pouze písmenko x; může jí být libovolné písmenko)
ax^2 … kvadratický člen
bx … lineární člen
c … absolutní člen

a … libovolné reálné číslo vyjma 0
Pokud bychom totiž za a do obecného zápisu kvadratické rovnice nulu, dostali bychom tvar
$0x^2 + bx + c = 0 \;\rightarrow\; bx + c = 0$
Nejednalo by se tak už o rovnici kvadratickou, nýbrž lineární.

b, c … libovolná reálná čísla

Ekvivalentní úpravy jsou takové úpravy, které nemění výsledek rovnice. Při použití neekvivalentních úprav (například umocňování) může dojít ke změně výsledku rovnice, a proto je nutné provést zkoušku (viz dále).
Reálné číslo je takové číslo, které můžeme zobrazit na číselné ose.

Je zápis $5r^2 + 12r + 6 = 3r^2 - 5$ kvadratickou rovnicí?

Na první, možná na druhý, pohled vidíme, že ano.
Rovnici lze totiž upravit:

$$\boldsymbol{5r^2 + 12r + 6 - 3r^2 + 5 = 0}$$

$$\boldsymbol{2r^2 + 12r + 11 = 0}$$

r … neznámá
$2r^2$ … kvadratický člen
$12r$ … lineární člen
11 … absolutní člen

$a = 2 \neq 0;\; b = 12;\; c = 11$

Je zápis $\sqrt{x^2 + 1} = -3$ kvadratickou rovnicí?

Rovnici umocníme a dále upravíme:
$x^2 + 1 = 9$
$\boldsymbol{x^2 - 8 = 0}$

x … neznámá
x^2 … kvadratický člen

0 … lineární člen
-8 … absolutní člen

$a = 1 \neq 0;\ b = 0;\ c = -8$

Uvedený výraz podmínky kvadratické rovnice sice splňuje, avšak provedli jsme obecně neekvivalentní úpravu – umocnění. Rovnici tedy vyřešíme, a poté provedeme zkoušku.

$x^2 - 8 = 0$
$x^2 = 8$
$|x| = \sqrt{8}$

Odmocnili jsme rovnici, platí, že absolutní hodnota z x se rovná $\sqrt{8}$**.**
Výsledkem jsou tedy kořeny dva, a to $\sqrt{\mathbf{8}}$ a $-\sqrt{\mathbf{8}}$.
Umocníme-li totiž $\sqrt{8}$ i $-\sqrt{8}$ na druhou, dostaneme 8.
$\boldsymbol{x_1} = \sqrt{\mathbf{8}};\ \ \boldsymbol{x_2} = -\sqrt{\mathbf{8}}$

Jelikož jsme provedli neekvivalentní úpravu, musíme udělat zkoušku:

Pro první kořen:

$L = \sqrt{\sqrt{\mathbf{8}}^{\mathbf{2}} + 1} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$ (levá strana rovnice)
$P = -3$ (pravá strana rovnice)
$L \neq P$ (levá strana rovnice se nerovná pravé straně rovnice)

Pro druhý kořen:

$L = \sqrt{(-\sqrt{\mathbf{8}})^{\mathbf{2}} + 1} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$ (levá strana rovnice)
$P = -3$ (pravá strana rovnice)
$L \neq P$ (levá strana rovnice se nerovná pravé straně rovnice)

Ze zkoušky tak vidíme, že *rovnice nemá řešení*. To, že rovnice nemá řešení, je však vidět na první pohled, jelikož výraz pod odmocninou nemůže být záporný.
Ani jeden z kořenů tedy není řešením rovnice. Zkouška tedy nevyšla (u obou kořenů).
Provedená úprava (umocnění) byla i v tomto případě skutečně neekvivalentní → výraz $\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1}} = \mathbf{-3}$ tedy není kvadratickou rovnicí.

Pokud by zkouška vyšla pro oba kořeny, byla by obecně neekvivalentní úprava *v tomto konkrétním případě* ekvivalentní a rovnici by tak byla kvadratickou. Některé rovnice, které obsahují odmocninu, tedy mohou být kvadratickými rovnicemi.

Jak řešit kvadratické rovnice

1. Řešení ryze kvadratické rovnice

Ryze kvadratická rovnice má nulový lineární člen (bx).

$$ax^2 + c = 0$$

Příklad:

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = \frac{27}{3}$$

$$x^2 = \frac{27}{3}$$

$$x^2 = 9$$

$|x| = 3$ Odmocnili jsme rovnici; platí, že absolutní hodnota z x se rovná 3**. Výsledkem jsou tedy kořeny dva, a to 3 a – 3.** Umocníme-li totiž 3 i -3 na druhou, dostaneme 9.

$$\boldsymbol{x_1 = 3;\ x_2 = -3}$$

2. Řešení pomocí *Viètových vzorců*

Ty jsou následující:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Hodí se na řešení kvadratických rovnic, u nichž $a = 1$ a b a c jsou celá čísla.

Příklad:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 5 \quad c = 6$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -5 \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a} = 6$$

Součet kořenů tedy dá -5 a zároveň součin kořenů dá 6. Dostáváme tak dvě rovnice o dvou neznámých (x_1, x_2), jejichž řešení není těžké uhodnout…

$$\boldsymbol{x_1 = -2;\ x_2 = -3}$$

Tyto typy rovnic lze řešit ještě o něco elegantněji.

Rovnici můžeme rozložit:

$x^2 + 5x + 6 = (x + \mathbf{2})(x + \mathbf{3}) = 0$

Pokud sečteme čísla v závorce, dostaneme 5 (b), pokud je vynásobíme, dostaneme 6 (c) – tedy čísla, která vidíme hned v rovnici. Nemusíme tedy nad *Viètovými vzorci* příliš přemýšlet, i když to s nimi samozřejmě souvisí.

Kořeny rovnici pak jsou čísla s opačnými znaménky, než čísla v závorkách.

$\boldsymbol{x_1 = -2;\ x_2 = -3}$

Zkusíme si tímto způsobem vyřešit další příklad.

$x^2 - 7x - 4 = -10$

Rovnice se nezalekneme a před samotným řešením ji mírně upravíme:

$x^2 - 7x + 6 = 0$ Minus desítku z pravé strany jsme převedli na levou stranu a přičetli k minus čtyřce. Rovnici máme připravenou…

$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6) = 0$

Součet čísel v závorce dává -7 a jejich součin dává 6.

Kořeny rovnici pak jsou čísla s opačnými znaménky, než čísla v závorkách, tedy

$\boldsymbol{x_1 = 1;\ x_2 = 6}$

Zkusíme tímto způsobem vyřešit ještě jednu rovnici.

$3x^2 - 17x + 9 = -9 + 4x$

Rovnici nejdříve opět upravíme.

$3x^2 - 17x - 4x + 9 + 9 = 0$

$3x^2 - 21x + 18 = 0$ Rovnice lze krásně vydělit třemi, proto tak učiníme.

$x^2 - 7x + 6 = 0$ Dostali jsme nám již známou rovnici z předchozí úlohy.

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$(x - 1)(x - 6) = 0$

$\boldsymbol{x_1 = 1;\ x_2 = 6}$

3. Řešení kvadratických rovnic bez absolutního členu

U tohoto typu rovnic $\boldsymbol{c = 0}$.

Příklad:

$x^2 + 5x = 0$

Rovnici řešíme tak, že vytkneme x.

$x(x + 5) = 0$

Výraz na levé straně se pak rovná nule, pokud se $x = 0$ nebo výraz v závorce $x + 5 = 0$ (nebo $x = 0$ a současně $x + 5 = 0$).

První kořen tedy je: $\boldsymbol{x_1 = 0}$

Druhý kořen pak dostaneme řešením rovnice $x + 5 = 0$. Řešení je vidět na první pohled.

$\boldsymbol{x_2 = -5}$

Příklad:

$2x^2 + 10x = x$

$2x^2 + 10x - x = 0$

$2x^2 + 9x = 0$

$x(2x + 9) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 2x + 9 = 0$ *To „véčko“ mezi rovnicemi znamená „nebo“.*

$2x = -9$

$x = -\frac{9}{2}$

$\boldsymbol{x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{9}{2}}$

4. Univerzální řešení kvadratických rovnic

Pomocí vzorečku

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Spolu s Pythagorovou větou se jedná asi o nejznámější matematický vzorec. Jeho zapamatování je téměř „povinností“ :-)

Výraz pod odmocninou je diskriminant.

$$D = b^2 - 4ac$$

Pokud:

- D = 0 → oba kořeny vyjdou stejné – řešením rovnice je jeden *dvojnásobný kořen*
- D > 0 → dva různé kořeny
- D < 0 → rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení, diskriminant se totiž ve vzorečku vyskytuje pod odmocninou a v oboru reálných čísel nelze odmocňovat záporná čísla

Příklad:

$$2x^2 + 11x + 5 = 0$$

Vidíme, že se na řešení této rovnice příliš nehodí výše uvedené způsoby. Dosadíme tedy do vzorečku.

$$a = 0 \quad b = 11 \quad c = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4} = \frac{-11 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-11 + 9}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{-11 - 9}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

$$\boldsymbol{x_2 = -5}$$