Rovnoměrného pohybu po kružnici — dostředivé zrychlení

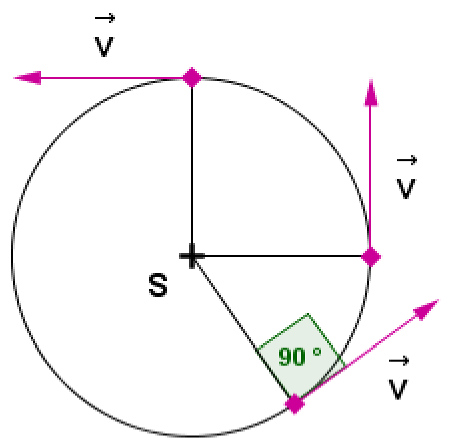
Zrychlení obecně

Je definováno jako

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

Změna *vektoru* rychlosti v čase.

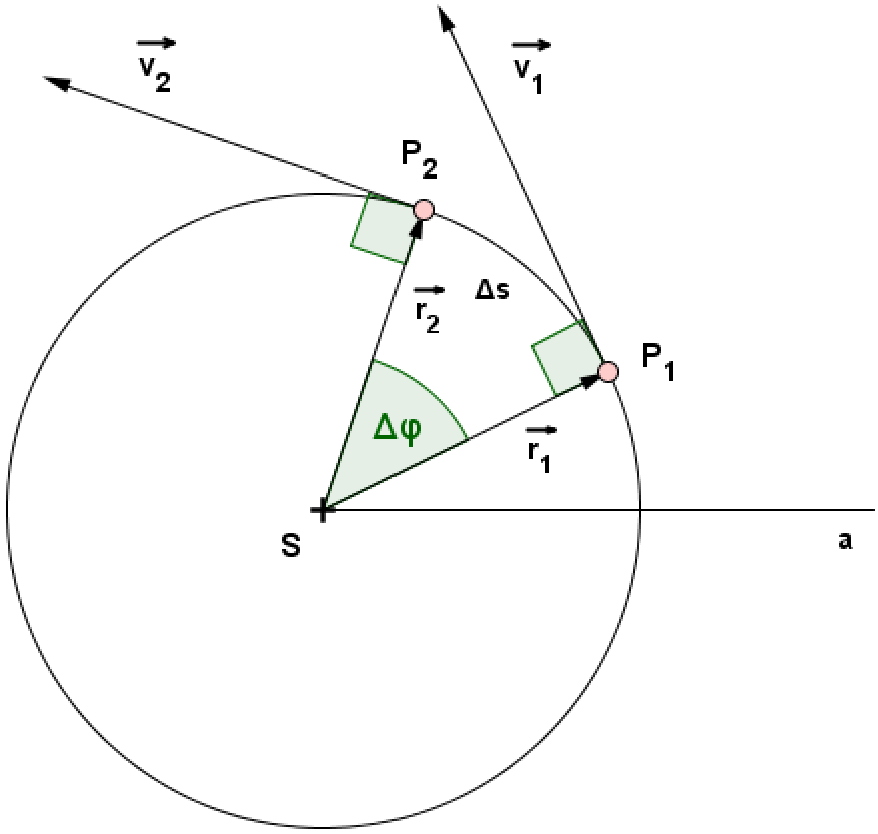
Vektor má velikost i směr – abychom mohli mluvit o zrychlení, stačí, když se mění jen velikost nebo jen směr (ale i obojí). U rovnoměrného pohybu po kružnici se nemění velikost rychlosti, ale mění se její směr (obvodové rychlosti).



Obrázek ukazuje změnu vektoru rychlosti při rovnoměrném pohybu po kružnici. *Velikost se zachovává* (vektory jsou stejně dlouhé), ale *mění se směr* (vektory v každém bodě směřují jinam).

Změnu směru vektoru si ukážeme graficky…

Odvození vztahu pro dostředivé zrychlení



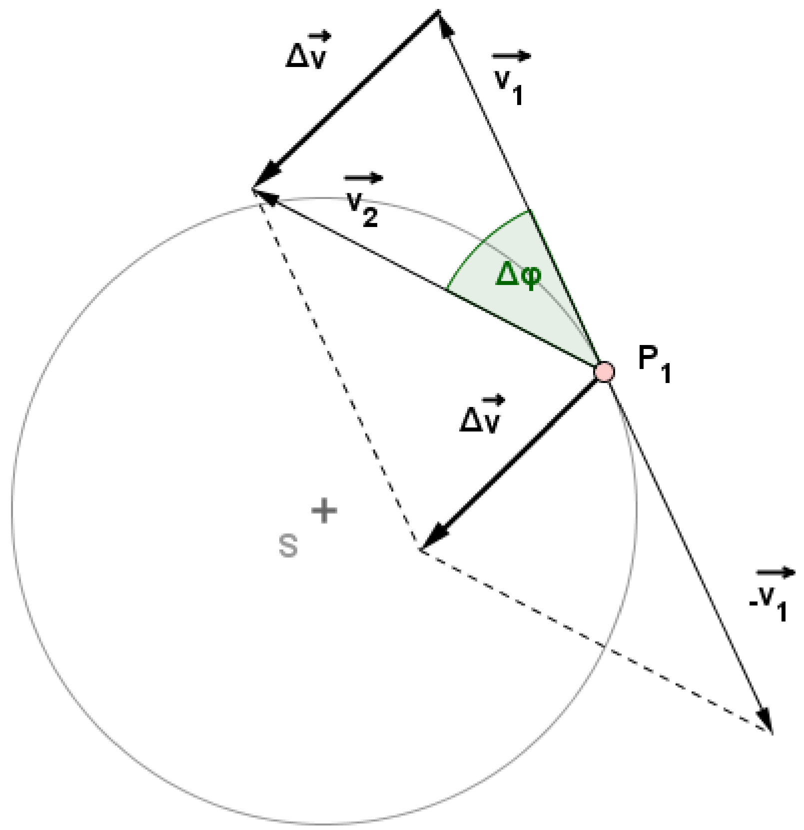
Bod opíše za nějakou dobu úhel $\Delta\varphi$ a oblouk Δs. Posune se z polohy P_1 do polohy P_2. Vektory $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ znázorňují velikost (ta je stejná) a směr (ten je různý) obvodové rychlosti v daných polohách P_1 a P_2.

Nyní přesuneme počátek vektoru $\boldsymbol{v_2}$ do působiště vektoru $\boldsymbol{v_1}$, tedy do bodu P_1 a graficky odečteme vektor $\boldsymbol{v_1}$ od vektoru $\boldsymbol{v_2}$. Tím získáme $\Delta\boldsymbol{v}$.

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}}{\Delta t}$$

Vizte následující obrázek.

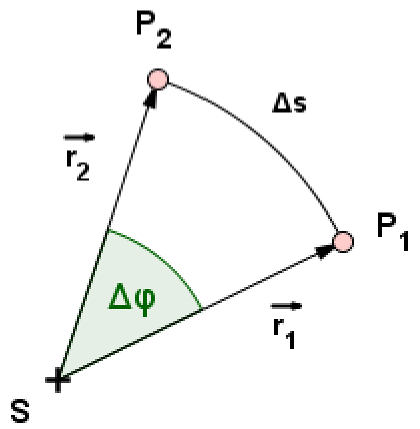


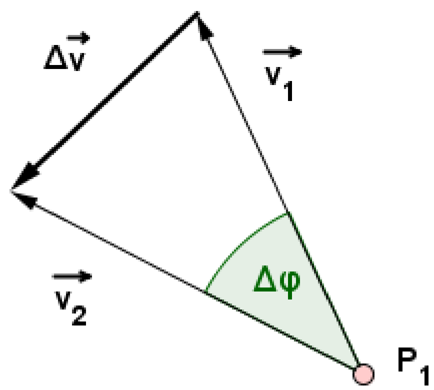
Graficky jsme odečetli vektor $\boldsymbol{v_1}$ od vektoru $\boldsymbol{v_2}$. Udělali jsme to tak, že jsme vektor $\boldsymbol{v_2}$ sečetli s opačným vektorem k vektoru $\boldsymbol{v_1}$, protože odečítání je vlastně přičítání záporného čísla. Dostali jsme tak vektor $\Delta\boldsymbol{v}$, který jsme kvůli názornosti v dalším odvozování také přenesli mezi koncové body vektorů $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$.

Tedy:

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v_2} + (-\boldsymbol{v_1})$$

Pokud se pozorně podíváme, zjistíme, že vektory $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ svírají stejný úhel jako vektory $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}$:





Pokud je úhel $\Delta\varphi$ dostatečně (dokonce nekonečně) malý, můžeme oblouk Δs považovat za úsečku (rovnou čáru). Získáme tak podobné trojúhelníky, pro jejichž poměry velikostí stran platí:

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta s} = \frac{|\boldsymbol{v_1}|}{|\boldsymbol{r_1}|}$$

V obecnějším tvaru (bez indexů) pak:

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta s} = \frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{r}|} \Longrightarrow |\Delta \boldsymbol{v}| = \Delta s \frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{r}|}$$

Vědomě nezmiňuji, že aby rovnost platila, musí být úhel $\Delta\varphi$ nekonečně malý. Čekám, až si někdo všimne, že se na obrázcích Δs přeci nerovná $|\Delta \boldsymbol{v}|$. Většinou se dočkám a pak odpovím, že rovnost platí pro velmi malý úhel.

Žáci a žákyně se začnou ptát, jak malý musí ten úhel být, abychom mohli oblouk Δs považovat za úsečku (rovnou čáru) a napsat tak předchozí rovnost. Odpovídám, že nekonečně malý. Menší než si dovedou představit. Jelikož však zatím neznají infinitezimální počet, příliš je tato odpověď neuspokojí.

Položím tedy otázku: „Proč je ulice rovná, když je Země kulatá?“ Všichni pak odpovídají, že kvůli obrovským rozměrům Země vůči ulici je zakřivení zanedbatelné. Já poté jen dodám, že obdobné je to i v případě uvedených trojúhelníků…

Pro velikost zrychlení pak můžeme napsat:

$$|\boldsymbol{a}| = \frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t} = \frac{\Delta s \frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{r}|}}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{r}|} = v\frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{r}|} = v\frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$$

$$\boldsymbol{a_d = \frac{v^2}{r}}$$

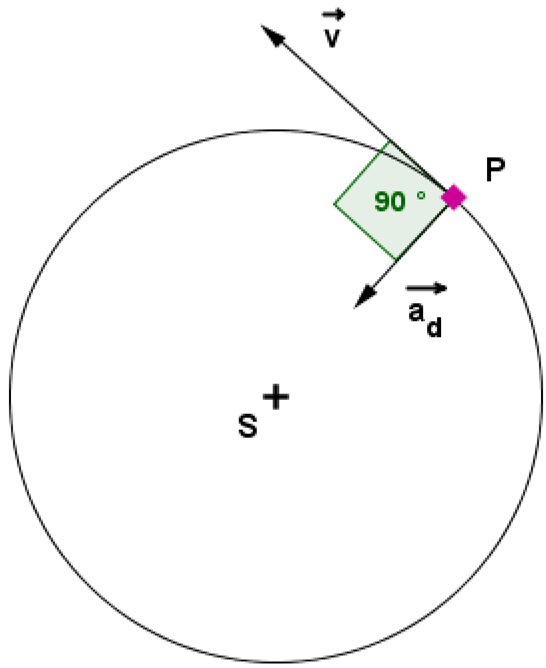
Index *d* jako *dostředivé* zrychlení.

Pokud za obvodovou rychlost dosadíme ze vztahu $v = \omega r$ dostaneme:

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\boldsymbol{a_d = \omega^2 r}$$

Dostředivé zrychlení vyjadřuje změnu směru obvodové rychlosti a, jak již podle názvu lze vyvodit, směřuje do středu (vizte následující obrázek).



Vektor dostředivého (normálového) zrychlení

Dostředivému zrychlení se také říká normálové, jelikož vektor tohoto zrychlení je kolmý na směr vektoru rychlosti (normála kružnice je totiž kolmice k její tečně).