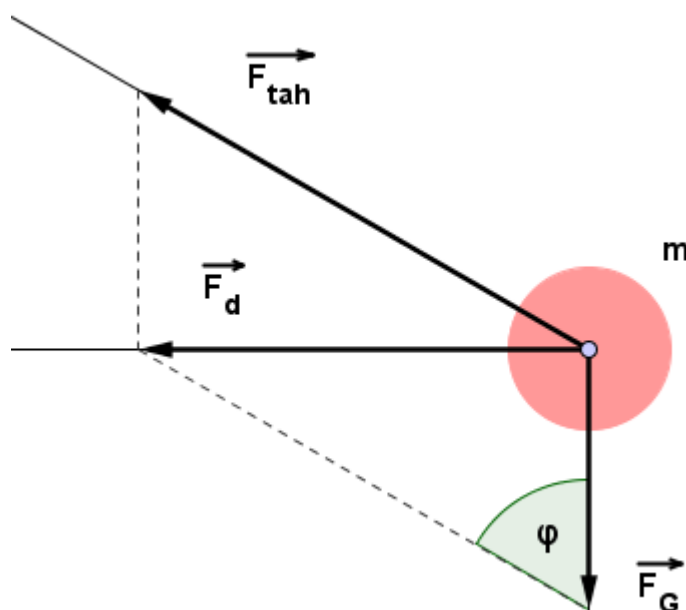
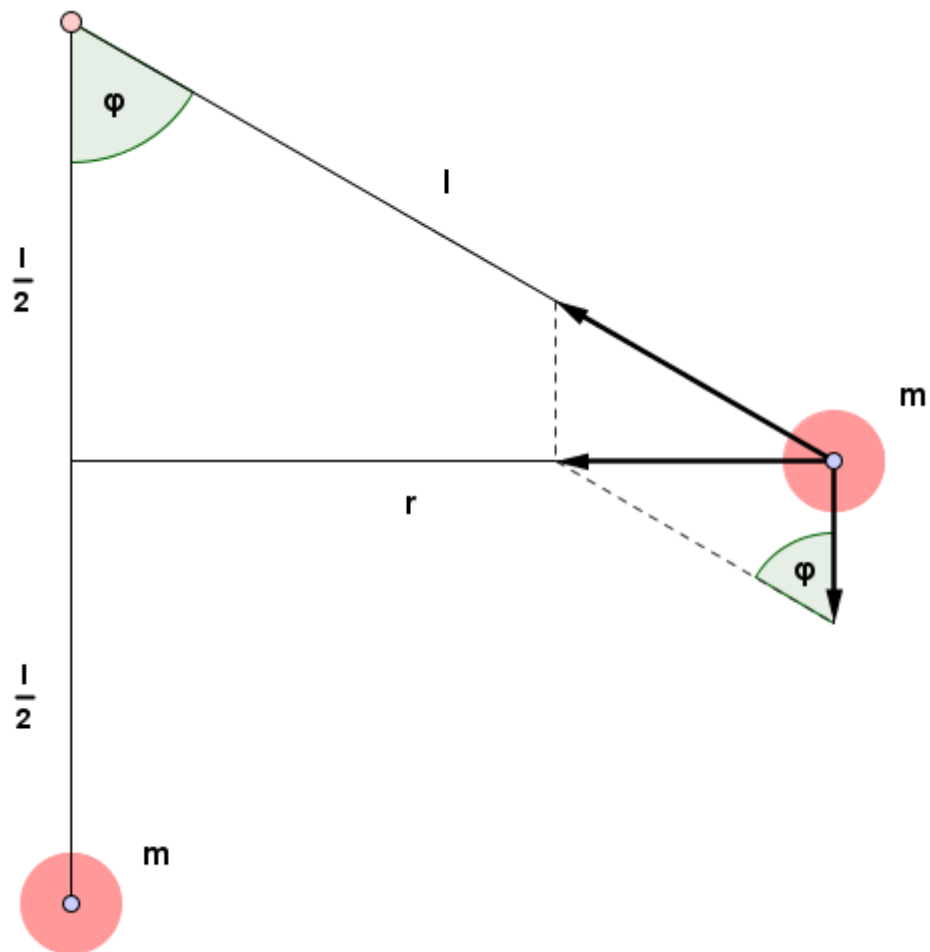


Roztáčíme kuličku o hmotnosti m zavěšenou na provázku délky l . Jak velkou práci musíme vynaložit, aby se kulička rovnoměrně otáčela ve výšce jedné poloviny délky provázku (aby vystoupala o polovinu délky provázku)?



Práce se rovná tomu, o co se změnila mechanická energie kuličky. Roztáčením získala kulička kinetickou energii a tím, že postoupila o výšku $l/2$, se zvýšila i její potenciální energie.

$$W = E_K + E_P$$

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_P = mgh = mg\frac{l}{2}$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{l}{2}$$

Neznáme však rychlost kuličky. Vyjádříme si ji ze vztahu pro dostředivou sílu.

$$F_d = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{F_d r}{m}$$

Neznáme však F_d . Vyjádříme si ji z pravoúhlého trojúhelníku (viz druhý obrázek).

$$tg\varphi = \frac{F_d}{F_G} \Rightarrow F_d = mgtg\varphi$$

Vyjádříme (pomocí prvního obrázku) ještě $tg\varphi$, protože úhel nemáme zadáný.

$$tg\varphi = \frac{r}{\frac{l}{2}} = \frac{2r}{l}$$

Další neznámou je r , což je poloměr kružnice, po které se kulička otáčí.

Podíváme se na první obrázek a poloměr si vyjádříme z pravoúhlého trojúhelníku.

Platí:

$$r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$r^2 + \frac{l^2}{4} = l^2$$

$$r^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4}l^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

Teď to dáme všechno dohromady.

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}m\frac{F_d r}{m} + mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}m\frac{mgtg\varphi r}{m} + mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}m\frac{mg\frac{2r}{l}r}{m} + mg\frac{l}{2}$$

$$W = \frac{1}{2}mg\frac{2r^2}{l} + mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}mg\frac{2\left(\frac{l}{2}\sqrt{3}\right)^2}{l} + mg\frac{l}{2} = mg\frac{l}{4}3 + mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}mgl\left(\frac{3}{2} + 1\right)$$

$$W = \frac{5}{4}mgl$$